Tesis de Maestría

# Acciones $C^1$ de algunos grupos solubles en dimensión 1

Ignacio Monteverde

Orientadora: Dra. Nancy Guelman

Maestría en Matemática
PEDECIBA
Universidad de la República
Uruguay

## Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar las acciones de algunos grupos solubles en $\mathbb{R}$ y $S^1$, con un especial hincapié en las acciones $C^1$. Guelman y Liousse caracterizan en [9] las acciones de $BS(1,n)$ en $Difeo^1_+(S^1)$, en nuestro trabajo utilizamos algunas resultados que aparecen en dicho artículo y damos sus pruebas. Luego introducimos los grupos $\Gamma_{n,k}$ (definidos por Asaoka en [1]) y generalizamos a estos los resultados obtenidos para $BS(1,n)$. Finalmente, se presentan los grupos "abelian by cyclic", para los cuales se logran ciertos resultados similares en algunos casos particulares, quedando el caso general como una pregunta sin responder.



## Abstract

The aim of our work is to study the actions of some solvable groups on the circle and the line, with focus on the $C^1-$actions. Guelman and Liousse ([9]) characterize the representations of $BS(1,n)$ in $Difeo^1_+(S^1)$, we present the proofs for completion. After that, we introduce the groups $\Gamma_{n,k}$ (that are defined by Asaoka in [1]) and we generalize the results for $BS(1,n)$ to these groups. Finally, we introduce the "abelian by cyclic" groups and we find similar results for some special cases, although the general case remains as an open question.

# Índice general

# Introducción

En la teoría clásica de sistemas dinámicos el objeto de estudio son las órbitas de un homeomorfismo o de un flujo sobre un espacio topológico. Esto puede verse como una acción continua del grupo $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$ sobre dicho espacio. En la teoría de acciones de grupos esto se generaliza, estudiando acciones de otros grupos sobre espacios topológicos.

En este trabajo restringimos el estudio al caso en que el espacio topológico es una variedad de dimensión 1 y el grupo no tiene topología (o la topología es la discreta). En este sentido aparecen como referencia ineludible los libros de Ghys ([8]) y Navas ([15]), dos trabajos muy importantes que abarcan gran parte de la teoría.

Las acciones $C^2$ de grupos solubles en $\mathbb{R}$, $[0,1)$ y $S^1$ son caracterizadas por Navas en [16] (en el capítulo 4 de [15] aparecen estos resultados y sus pruebas en español). Nuestro objetivo es caracterizar las representaciones fieles de clase $C^1$ de determinados grupos solubles en $S^1$, en particular determinar si estas acciones tienen órbitas finitas.

Se definen los grupos de Baumslag-Solitar por $BS(1,n) =< a, b/aba^{-1} = b^n >$. Las acciones $C^2$ de estos grupos en $S^1$ son estudiadas por Burlsem y Wilkinson en [3], donde se da una clasificación de las mismas a menos de semiconjugación (que se obtiene como corolario de la clasificación hecha por Navas en [16]); además, se prueba que dichas acciones siempre tienen una órbita finita.
En [9] Guelman y Liousse estudian las acciones de clase $C^1$ de los grupos de Baumslag-Solitar en $[0,1]$ y $S^1$. Se demuestra que, a menos de un subgrupo de índice finito, todas estas acciones son semiconjugadas a una determinada, que llamamos "estándar", en la que $a$ se identifica con el mapa $x \mapsto nx$ y $b$ con $x \mapsto x+1$. Para el caso $S^1$ se prueba que cualquier acción fiel de $BS(1,n)$ tiene una órbita finita. En nuestro trabajo aparecen las pruebas completas de estas propiedades, reescribiendo las demostraciones que aparecen en [9] y [17].

Los grupos $\Gamma_{n,k} =< a, b_1, ..., b_n/\ b_ib_j = b_jb_i,\ ab_ia^{-1} = b_i^k >$, una generalización de $BS(1,k)$, son introducidos por Asaoka en [1]. En ese artículo se estudian las acciones de $\Gamma_{n,k}$ en $S^n$ con $n > 1$; allí se encuentran ciertas acciones similares a las "estándar" de $BS(1,k)$ y se prueba para ellas cierto tipo de rigidez (un resultado más fuerte para $n = 1$ se prueba por Farb y Franks en [7]).
En nuestro trabajo se estudian las acciones $C^1$ de $\Gamma_{n,k}$ en $[0,1]$ y $S^1$. Definimos representaciones estándar en el grupo afín (similares a las que aparecen en [1]) y probamos que, a menos de un subgrupo de índice finito, toda representación $C^1$ de $\Gamma_{n,k}$ en $S^1$ o $[0,1]$ es semiconjugada a una de las estándar. Además, para el caso de $S^1$ se deduce la existencia de una órbita finita.

Es decir que se generalizan los resultados de $BS(1,n)$ a $\Gamma_{n,k}$.

Los grupos $\Gamma_{n,k}$ son un caso particular de los "abelian by cyclic", una familia de grupos que definimos en el capítulo 5 del trabajo. En [12] McCarthy estudia las acciones de algunos de estos grupos en variedades en general; allí se prueba que (bajo ciertas hipótesis en los grupos) ninguna representación $C^1$-cerca de la trivial es fiel.
Nuestro objetivo es obtener para estos grupos alguno de los resultados obtenidos para los $\Gamma_{n,k}$. La generalización dista de ser inmediata, ya que no pudimos encontrar una acción "estándar" para estos grupos en general. Se muestra la existencia de órbitas finitas para $S^1$ en el caso $C^2$; para el caso $C^1$ se obtiene únicamente en algunos casos particulares.

El primer capítulo es de preliminares. En la primera sección del mismo se introducen las extensiones HNN (los grupos $BS(m,n)$, $\Gamma_{n,k}$ y $\Gamma_A$ pueden verse como extensiones HNN) y en la segunda aparecen los resultados clásicos de dinámica en $S^1$ .

En el segundo capítulo nos introducimos en las representaciones de grupos en $\mathbb{R}$ y $S^1$. Se presentan allí varios resultados fundamentales que se utilizarán más adelante: cuáles son los conjuntos minimales en el círculo, la relación entre acciones de un grupo $G$ en $\mathbb{R}$ y los órdenes sobre $G$, propiedades del número de traslación, y los teoremas de Hölder y de Margulis.

En el tercer capítulo se caracterizan las representaciones sobre $Difeo^1_+(S^1)$ de los grupos $BS(1,n)$. Esto fue realizado en [9], aquí reproducimos la demostración. El resultado principal es la caracterización a menos de semiconjugación de las acciones $C^1$ de $BS(1,n)$ en $S^1$, en su prueba se aplica una idea utilizada por Cantwell y Conlon en [4]. También se utilizan fuertemente resultados obtenidos por Rivas en [17].

En el capítulo cuarto se logra una generalización de los resultados obtenidos para $BS(1,n)$ para el caso de $\Gamma_{n,k}$.

En el capítulo quinto aparecen menos resultados que preguntas. Se intenta generalizar lo obtenido para $\Gamma_{n,k}$ a los grupos llamados "abelian by cyclic ". Esto se logra únicamente en algunos casos particulares, quedando el caso general como una pregunta abierta.

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1. Extensiones HNN

El siguiente teorema es muy conocido, aparece en [10]:

**Teorema 1.1** *Sean $G$ un grupo y $\mu : C \to D$ un isomorfismo entre dos subgrupos de $G$. Entonces existe un grupo $H$ que contiene a $G$ y un elemento $t \in H$ tal que $tct^{-1} = \mu(c)$ para todo $c \in C$.*
*Si el grupo $G$ es libre de torsión, entonces $H$ también lo es.*
*Si $G$ es finitamente presentado y $C$ es finitamente generado entonces $H$ es finitamente presentado.*

De hecho, el gupo $H$ puede darse por la siguiente presentación:
$H =< t, G/ \ tct^{-1} = \mu(c) \ \forall c \in C >$.
O sea, dada una presentación de $G$ obtenemos una de $H$ agregando el generador $t$ y las condiciones $tct^{-1} = \mu(c)$ para cada $c$ en un conjunto generador de $C$.
Al grupo $H$ dado por el teorema se lo llama la extensión HNN de $G$ por $\mu$.
Utilizando lo que se denomina la forma normal de los elementos de una extensión HNN (ver por ejemplo [18]) puede probarse lo siguiente:

**Proposición 1.2** *Con la misma notación que en el teorema anterior, se tiene que en la extensión $H$ los subgrupos $< t >$ y $G$ tienen intersección trivial.*

## 1.2. Dinámica en $S^1$

Todos los resultados de esta sección aparecen en cualquier libro que se ocupe de dinámica en el círculo, una referencia es [6].

En general identificaremos al círculo $S^1$ con el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Llamaremos $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ a la proyección canónica.

**Proposición 1.3** *Dada $f : S^1 \to S^1$ continua, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tales que $f(\pi(x_0)) = \pi(y_0)$ existe una única $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $F(x_0) = y_0$ y $\pi F = f\pi$. A esta $F$ la llamamos un levantamiento de $f$.*

**Observaciones:**
(1) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y tomamos $F_1, F_2$ dos levantamientos de la misma, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F_1 = F_2 + k$.
(2) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $F$ un levantamiento de la misma existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x+1) = F(x) + m$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A este valor $m$ lo llamamos el grado de $f$ (no depende del levantamiento elegido).
(3) Si $f \in Homeo_+(S^1)$ entonces el grado de $f$ es 1 y $F$ es un homeomorfismo creciente.

**Teorema 1.4** *Sea $f \in Homeo_+(S^1)$, $F$ un levantamiento. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $\lim_n \frac{F^n(x)}{n}$ y es el mismo para todo $x$.*

El límite depende del levantamiento elegido, aunque únicamente en su parte entera. Esto permite definir el número de rotación de $f$.
**Definición:** El número de rotación de $f \in Homeo_+(S^1)$ es $\rho(f) = \lim_n \frac{F^n(x)}{n}$ $(mod\ \mathbb{Z})$, donde $F$ es un levantado de $f$ y $x \in \mathbb{R}$.
El número de rotación fue introducido por Poincaré a fines del siglo XIX. Es clave para entender la dinámica de los homeomorfismos del círculo, como lo muestran los siguientes resultados.

Si $f$ tiene puntos periódicos de período $q$ es inmediato verificar que $\rho(f) = p/q$ $(mod\ \mathbb{Z})$ para algún $p \in \mathbb{Z}$ tal que $mcd(p, q) = 1$. El recíproco también vale:

**Teorema 1.5** *Sea $f \in Homeo_+(S^1)$ tal que $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, con $mcd(p, q) = 1$. Entonces $f$ tiene puntos periódicos, todos de período $q$. Además, $\Omega(f) = Per(f)$.*

**Teorema 1.6** *Sea $f \in Homeo_+(S^1)$ tal que $\rho(f) = \alpha$ es irracional. Entonces:*

- *$\Omega(f)$ es un conjunto minimal que tiene dos posibilidades: es todo $S^1$ o es un conjunto de Cantor. En ambos casos se tiene que $\omega(x) = \Omega(f)$ para todo $x \in S^1$.*
- *$f$ es semiconjugado a la rotación de ángulo $\alpha$ por una semiconjugación que preserva orientación; cuando $\Omega(f) = S^1$ la semiconjugación es una conjugación.*
- *Si $f \in Difeo^2(S^1)$ entonces $\Omega(f) = S^1$, o sea que $f$ es conjugado a una rotación.*

El último ítem del teorema fue probado por Denjoy; Poincaré creía que existían difeomorfismos de clase $C^\infty$ con minimal un conjunto Cantor (página 24 en [8]). Denjoy mostró también que dado cualquier $\alpha$ irracional existe $f \in Difeo^1_+(S^1)$ tal que $\rho(f) = \alpha$ y $\Omega(f) \neq S^1$.

Finalizamos dando algunas propiedades básicas del número de rotación que utilizaremos más adelante.

**Proposición 1.7** *Si $f, g \in Homeo_+(S^1)$ conmutan entonces $\rho(fg) = \rho(f) + \rho(g)$. En particular $\rho(f^n) = n\rho(f)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*
*Si $f, g \in Homeo_+(S^1)$ son semiconjugadas por una función que preserva orientación entonces $\rho(f) = \rho(g)$.*

# Capítulo 2

# Acciones en $\mathbb{R}$ y $S^1$

En este capítulo introduciremos algunos resultados clásicos de la teoría de acciones de grupos por homeomorfismos en variedades de dimensión 1. La mayoría de ellos aparece en los ya nombrados libros de Navas y Ghys ([15] y [8]).

**Definición:** Una acción o representación de un grupo $G$ en un espacio topológico $X$ es un morfismo de grupos $\phi : G \to Homeo(X)$. Decimos que la acción es fiel si $\phi$ es inyectiva. Decimos que la acción es libre si $\phi(g)(x) \neq x$ para todo $x \in X$, para todo $g \in G \setminus \{id\}$.

**Observación:** Es claro que toda acción libre es fiel, pero no toda acción fiel es libre.

**Definición:** Dadas dos acciones $\phi_1, \phi_2 : G \to Homeo_+(\mathbb{R})$ decimos que la acción $\phi_1$ es semiconjugada a $\phi_2$ si existe $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente sobreyectiva (a la que llamamos semiconjugación) tal que $\psi\phi_1(g) = \phi_2(g)\psi$ para todo $g \in G$.
De igual forma, dadas dos acciones $\phi_1, \phi_2 : G \to Homeo_+(S^1)$ decimos que $\phi_1$ es semiconjugada a $\phi_2$ si existe $\psi : S^1 \to S^1$ continua de grado 1 que se levanta a $\mathbb{R}$ como una función creciente tal que $\psi\phi_1(g) = \phi_2(g)\psi$ para todo $g \in G$.
En ambos casos, si $\psi$ es inyectiva decimos que las acciones son conjugadas.

Dado un homeomorfismo $f : [0,1] \to [0,1]$ podemos transformarlo en un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ vía una conjugación por un homeo $c : (0,1) \to \mathbb{R}$ e identificando 0 con $-\infty$ y 1 con $\infty$; esta transformación $T : Homeo([0,1]) \to Homeo(\mathbb{R})$ es un isomorfismo de grupos (su inversa es conjugar por $c^{-1}$). Además, es claro que si $f$ preserva orientación entonces $T(f)$ también, o sea $T(Homeo_+([0,1])) = Homeo_+(\mathbb{R})$. Con la diferenciabilidad ocurre lo siguiente: tomando $c$ de forma que él y su inversa sean analíticas se obtiene que $T(Difeo^r([0,1])) \subsetneq Difeo^r(\mathbb{R})$ para cualquier $r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty, \omega\}$ (más adelante en el trabajo se muestra un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty$ tal que $T^{-1}(f) \notin Difeo^1([0,1])$).
Observemos qué ocurre con $S^1$. Dado un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podemos llevarlo a un homeo de $S^1$ con un punto fijo, utilizando la compactificación por un punto; en este proceso puede perderse toda diferenciabilidad. A la inversa, dado un homeomorfismo $g : S^1 \to S^1$ con un punto fijo podemos tomar $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantado de $g$ con $G(0) = 0$, tendremos en este caso que $G$ deja invariante $[0,1]$, por lo que podemos pensar $g$ como un homeo de $[0,1]$. En este caso toda regularidad se preserva.
Comentamos antes que el mapa $T$ (la conjugación) es un isomorfismo de grupos, esto genera

que lo que dijimos se podía hacer para un homeomorfismo puede generalizarse para acciones; es decir, por ejemplo, que toda acción de un grupo $G$ en $Homeo(\mathbb{R})$ puede llevarse a una acción en $Homeo([0,1])$, si la primera es fiel también lo será la segunda.

## 2.1. Conjuntos minimales de $S^1$

**Definición:** Sea $X$ un espacio topológico, $G$ un subgrupo de $Homeo(X)$. Un conjunto $K \subseteq X$ se dice invariante por la acción de $G$ si para todo $g \in G$ se tiene $g(K) = K$. Un conjunto cerrado invariante $K$ se llama minimal si el único cerrado invariante no vacío contenido en él es el propio $K$.

La existencia de minimales invariantes está garantizada cuando $X$ es compacto por el lema de Zorn. En el caso del círculo tenemos además:

**Teorema 2.1** *Si $\Gamma$ es subgrupo de $Homeo_+(S^1)$ entonces se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*
** hay una órbita finita,*
** todas las órbitas son densas (la acción se dice en este caso minimal),*
** existe $K \subseteq S^1$ invariante (que llamamos minimal excepcional) homeomorfo al conjunto de Cantor tal que $K \subseteq \overline{\Gamma(x)}$ para todo $x \in S^1$.*
*Si ocurre una de las últimas dos afirmaciones, existe un único conjunto minimal para la acción.*

*Demostración:* Como comentamos antes, la existencia de algún conjunto minimal $M$ está asegurada por ser $S^1$ compacto.
Los conjuntos $\partial M$ (frontera de $M$) y $M'$ (puntos de acumulación de $M$) son cerrados e invariantes por la acción; por lo tanto se cumple una de las siguientes opciones:
* $\partial M = \emptyset$: en este caso $M = S^1$;
* $M' = \emptyset$: en este caso $M$ es finito;
* $M = M' = \partial M$: en este caso $M$ es un Cantor.

Mostraremos ahora que en el último caso, $M$ es el único conjunto minimal para la acción. Para ello probaremos que $M \subseteq \overline{\Gamma(x)}$ para todo $x \in S^1$.
Sean $x \in S^1$, $y \in M$.
Si $x \in M$ entonces por la minimalidad de $M$ se tiene que $y \in \overline{\Gamma(x)}$.
Si $x \notin M$, tomamos $I = (a,b)$ la componente conexa de $M^c$ que contiene a $x$. Como $a \in M$ y $M = M'$ es minimal, existe $\{g_n\} \subseteq \Gamma$ tal que $g_n(a) \to y$, con $g_n(a) \neq g_m(a)$ para todo $n \neq m$. Los intervalos $g_n(I)$ son disjuntos, por lo tanto su longitud tiende a 0, generando que $g_n(x) \to y$. •

En el caso que el grupo $\Gamma$ admite un minimal excepcional $K$, entonces "aplastando" cada una de las componentes conexas de $K^c$ obtenemos un espacio $\tilde{S}^1$ homeomorfo a $S^1$ sobre el cual $\Gamma$ actúa de forma natural. Esta nueva acción resulta minimal. Llamando $\varphi : S^1 \to \tilde{S}^1$ al mapa cociente obtenemos que la acción original es semiconjugada a la nueva por medio de $\varphi$.

## 2.2. El número de traslación

**Definición:** Dados un grupo $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ y una medida $\nu$ no trivial sobre los borelianos de $\mathbb{R}$, finita en compactos, invariante por $G$, se define el número de traslación $\tau_\nu : G \to \mathbb{R}$ como $\tau_\nu(g) = \nu([x, g(x)))$, donde $x \in \mathbb{R}$ (asumimos $\nu([a,b)) = -\nu([b,a))$ si $a > b$).

La medida $\nu$ y el número de traslación $\tau_\nu$ cumplen las siguientes propiedades:

* la definición no depende del $x \in \mathbb{R}$ elegido;
*Demostración:* Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $f \in G$; entonces $\nu[x, f(x)) = \nu[x,y) + \nu[y, f(y)) + \nu[f(y), f(x)) = \nu[y, f(y))$, donde la última igualdad se debe a que $\nu$ es invariante por $f$ y por ende $\nu[f(y), f(x)) = \nu[y,x) = -\nu[x,y)$.

* $\tau_\nu$ es un morfismo;
*Demostración:* Si $f, g \in G$, $x \in \mathbb{R}$ entonces $\tau_\nu(fg) = \nu[x, fg(x)) = \nu[x, g(x)) + \nu[g(x), fg(x)) = \tau_\nu(g) + \tau_\nu(f)$.

* $Ker(\tau_\nu) = \{f \in G/\ Fix(f) \neq \emptyset\}$;
*Demostración:* Si $f \in G$ tiene un punto fijo $x$ entonces $\nu[x, f(x)) = \nu(\emptyset) = 0$.
Si $Fix(f) = \emptyset$ entonces $\{f^n(0) : n \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto no acotado inferior ni superiormente, o sea que $\mathbb{R} = \cup [f^n(0), f^{n+1}(0))$. Por lo tanto $\nu(\mathbb{R}) = \sum \nu([f^n(0), f^{n+1}(0))) = \sum \nu([0, f(0))) = \sum \tau_\nu(f)$. De aquí concluimos $\tau_\nu(f) \neq 0$ porque $\nu$ es no trivial.

* si $Fix(g) \neq \emptyset$ entonces $sop(\nu) \subseteq Fix(g)$.
*Demostración:* Sea $g$ con un punto fijo, $z \notin Fix(g)$. Sea $I$ intervalo que contiene a $z$ tal que $g(I) \cap I = \emptyset$. Si $z \in sop(\nu)$ entonces $\nu(I) > 0$. Como $g$ tiene punto fijo resulta que $\cup_{n \geq 0} g^n(I)$ está acotado (o esto ocurre con la unión para $n < 0$). Por lo tanto llegamos a la siguiente contradicción: $\infty = \sum_{n \geq 0} \nu(I) = \sum_{n \geq 0} \nu(g^n(I)) = \nu(\cup_{n \geq 0} g^n(I)) < \infty$.

El grupo $G$ podría tener más de una medida invariante (por ejemplo, si $G$ es el grupo de traslaciones enteras entonces tanto *Leb* como $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \delta_x$ son medidas invariantes por $G$). Los siguientes resultados dan cierta unicidad en la medida:

**Teorema 2.2** *Sea $G$ un subgrupo de $Homeo_+(\mathbb{R})$ que deja invariantes las medidas de Radon $\nu$ y $\mu$. Entonces:*
*(1) existe $k > 0$ tal que $\tau_\nu = k\tau_\mu$,*
*(2) si $\tau_\nu(G)$ es denso en $\mathbb{R}$ entonces existe $k > 0$ tal que $\nu = k\mu$.*

*Demostración:*
(1) Por las propiedades mostradas arriba tenemos que $Ker(\tau_\nu) = Ker(\tau_\mu) = \{f \in G/\ Fix(f) \neq \emptyset\}$, llamemos $N$ a este subgrupo.
Llamando $K = Im(\tau_\mu)$, $H = Im(\tau_\nu)$, tenemos pasando al cociente dos isomorfismos $\tilde{\tau}_\nu : G/N \to H$, $\tilde{\tau}_\mu : G/N \to K$. Dados $f, g \in G$ tales que $f \neq g\ (mod\ N)$ se tiene $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (porque por las propiedades del número de traslación, si $fg^{-1}(x) = x$ entonces $fg^{-1} \in N$).
Veamos que $\tilde{\tau}_\mu \tilde{\tau}_\nu^{-1} : H \to K$ es creciente. Supongamos $\tau_\nu(f) < \tau_\nu(g)$, entonces $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de lo que se concluye $\tau_\mu(f) \leq \tau_\mu(g)$.

De la siguiente afirmación, se deduce que existe $k > 0$ tal que $\tilde{\tau}_\mu \tilde{\tau}_\nu^{-1}(a) = ka$ para todo $a \in H$.
*Afirmación:* Si $D$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$ y $\psi : D \to \mathbb{R}$ es un morfismo creciente entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(x) = kx$ para todo $x \in D$.
Sea $g \in D$ un elemento no trivial cualquiera, llamamos $k = \psi(g)/g$. Sea $h \in D$.
Si existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $mh = ng$, entonces $m\psi(h) = \psi(mh) = \psi(ng) = n\psi(g) = nkg = kmh$, o sea que $\psi(h) = kh$.
Si $\{h, g\}$ es un conjunto l.i. sobre $\mathbb{Q}$, entonces $< h, g >$ no es cíclico, por lo tanto es denso, o sea que existen dos sucesiones $\{m_i\}, \{n_i\} \subseteq \mathbb{Z}$ tales que $x_i = m_i g + n_i h \to 0$. Podemos además suponer que $n_i \to \infty$. Si $\psi(h)/h = r \neq k$ entonces $\psi(x_i) = m_i\psi(g) + n_i\psi(h) = m_i kg + n_i rh = kx_i + (r-k)n_i h \to \infty$, lo que contradice que $\psi$ sea creciente.

(2) Observemos que por (1) tenemos que también $\tau_\mu(G)$ es denso en $\mathbb{R}$. Ya que $\tau_{k\mu} = k\tau_\mu$, podemos suponer que $\tau_\mu = \tau_\nu$, de ahí concluiremos $\mu = \nu$.
Mostremos primero que ninguna de las medidas tiene átomos. Si $\mu(\{x\}) = l > 0$ y $f(x) \neq x$ entonces $| \tau_\mu(f) | \geq l$, esto contradice que $\tau_\mu(G)$ sea denso en $\mathbb{R}$.
Es claro que el soporte de $\mu$ es un conjunto invariante por la acción de $G$. En este caso también es minimal: sea $M \subsetneq sop(\mu)$ cerrado invariante, $y \in sop(\mu) \setminus M$, tomemos $(a, b)$ componente conexa de $M^c$ que contiene a $y$; si $f \in G$ es tal que $f(a) > a$ entonces $f(a) > b$, por lo que $\tau_\mu(f) \geq \mu([a, b)) > 0$, contradiciendo que $\overline{\tau_\mu(G)} = \mathbb{R}$.
Veamos que los conjuntos minimales $sop(\mu)$, $sop(\nu)$ son en realidad el mismo. En caso que no, existe $x \in sop(\mu) \setminus sop(\nu)$. Tomemos un intervalo $I$ que contenga a $x$ tal que $\nu(I) = 0$. Utilizando la minimalidad de la acción en $sop(\mu)$ y que $x$ no es átomo concluimos la existencia de $g \in G$ tal que $g(x) \in I \setminus \{x\}$. Para dicha $g$ se tendrá $\tau_\nu(g) = 0$ y $\tau_\mu(g) \neq 0$.
Para terminar la prueba, observemos que basta demostrar que $\mu([x, y)) = \nu([x, y))$ para todos $x, y \in sop(\nu)$. Sean $x, y$ en el soporte de ambas medidas, por la minimalidad podemos encontrar $\{g_n\} \subseteq G$ tal que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = y$. Concluimos entonces que:
$\mu([x, y)) = \lim_n \mu([x, g_n(x))) = \lim_n \tau_\mu(g_n) = \lim_n \tau_\nu(g_n) = \lim_n \nu([x, g_n(x))) = \nu([x, y))$. •

## 2.3. Grupos ordenables

**Definición:** Decimos que un grupo es ordenable si admite un orden total invariante a izquierda.

**Observaciones:**
(1) Si un grupo $G$ es ordenable, entonces cualquier subgrupo $H$ del mismo también lo es; podemos restringir el orden de $G$ a $H$, verificar que la restricción es total e invariante es inmediato.
(2) Como sabemos, todo grupo abeliano finitamente generado sin elementos de torsión es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, por lo tanto es ordenable (tomar por ejemplo el orden lexicográfico).
(3) Puede probarse sin demasiada dificultad (ver por ejemplo [14]) que un grupo es ordenable si y solo si cualquier subgrupo finitamente generado de él lo es. Como consecuencia de esta propiedad y de la observación anterior obtenemos que cualquier grupo abeliano libre de torsión es ordenable.
(4) Un grupo $G$ es ordenable si y solo si $G = P \cup N \cup \{id\}$, donde $P, N$ son semigrupos y la unión es disjunta.

Si $G$ admite un orden $\preceq$, basta tomar $P_{\prec} = \{g \in G / \ g \succ id\}$ (el cono positivo) y $N_{\prec} = \{g \in G / \ g \prec id\}$ (el cono negativo). Si $G = P \cup N \cup \{id\}$ podemos definir el orden $\preceq$ dado por: $g \prec h$ si $h^{-1}g \in N$.
Dado un orden total en $G$ invariante a izquierda $\prec$, tenemos su cono positivo $P$. Resulta que $\prec$ es invariante a derecha si y solo si $gPg^{-1} \subseteq P$ para todo $g \in G$.
(5) En la definición de grupo ordenable puede cambiarse "invariante a izquierda" por "invariante a derecha". Esto es claro a partir de la caracterización que acabamos de dar utilizando los conos positivo y negativo.
(6) Si un grupo $G$ es ordenable entonces no tiene elementos de torsión: si $g \in G$ no es el neutro entonces $g \in P_{\prec}$ o $g \in N_{\prec}$; suponiendo lo primero obtenemos $g^n \in P_{\prec}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $g^n \neq id$.
(7) Si $\preceq$ es un orden total invariante a izquierda sobre un grupo $G$ no trivial entonces $G$ no tiene máximo ni mínimo. Esto se debe a que si $g \prec 1_G$ entonces $g^{n+1} \prec g^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente resultado muestra que en el caso de grupos numerables ser ordenable es equivalente a actuar fielmente en $\mathbb{R}$.

**Teorema 2.3** *(1) El grupo $Homeo_+(\mathbb{R})$ es ordenable.*
*(2) Si un grupo $G$ numerable es ordenable entonces existe $\phi : G \to Homeo_+(\mathbb{R})$ acción fiel.*

*Demostración:*
(1) Tomamos $\{x_n\}$ una sucesión densa en $\mathbb{R}$. Definimos el orden $\preceq$ de la siguiente manera: dados $g, h \in Homeo_+(\mathbb{R})$ distintos existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(x_n) \neq h(x_n)$, tomamos el menor $n$ que lo verifica, diremos $g \prec h$ si $g(x_n) < h(x_n)$.
Es sencillo verificar que $\preceq$ es una relación de orden total e invariante a izquierda.

(2) Sea $\preceq$ un orden total sobre $G$ invariante a izquierda. Enumeramos los elementos de $G$, o sea $G = \{g_0, g_1, ...\}$. Se define $t : G \to \mathbb{R}$ inductivamente:
* $t(g_0) = 0$,
* $t(g_{k+1}) = \text{máx}\{t(g_0), ..., t(g_k)\} + 1$, si $g_{k+1} \succ g_i$ para todo $i \leq k$,
* $t(g_{k+1}) = \text{mín}\{t(g_0), ..., t(g_k)\} - 1$, si $g_{k+1} \prec g_i$ para todo $i \leq k$,
* $t(g_{k+1}) = \frac{t(g_m)+t(g_n)}{2}$, si $m, n \leq k$ verifican $g_m \prec g_{k+1} \prec g_n$ y no existe $r \leq k$ con $g_m \prec g_r \prec g_{k-1}$ o $g_{k-1} \prec g_r \prec g_n$.

Esta función $t$ es creciente e inyectiva.
Definimos una acción $\phi$ de $G$ en $t(G)$ de la siguiente manera: $\phi(g)(t(h)) = t(gh)$. Por ser el mapa $t$ creciente tenemos que la función $\phi(g)$ es creciente para todo $g \in G$.
El conjunto $t(G)$ es no acotado: la sucesión $m_n = \text{máx}\{t(g_i) : \ i \leq n\}$ está incluida en $\mathbb{Z}$ (por definición de $t$), si estuviera acotada entonces $G$ tendría máximo, algo que no ocurre (observación (7) previa).
Probaremos que si $(a, b)$ es componente conexa de $\overline{t(G)}^c$ entonces $a, b \in t(G)$. Notamos $r = b - a$, sean $i, j$ tales que $0 < a - t(g_i) < r/3$, $0 < t(g_j) - b < r/3$. Si $a$ ó $b$ no están en $t(G)$ entonces, para que $t(G)$ acumule en $a$ ó $b$, debe existir $k > i, j$ tal que $g_i \prec g_k \prec g_j$; tomando el mínimo $k$ que hace eso obtenemos $t(g_k) = \frac{t(g_i)+t(g_j)}{2} \in (a, b)$, contradiciendo que $(a, b) \subseteq t(G)^c$.
Veamos que la acción $\phi$ puede extenderse a $\overline{t(G)}$ de forma continua. De no ocurrir así, tendríamos $g \in G$, $a \in \overline{t(G)}$ y dos sucesiones $\{g_{i_j} : j \in \mathbb{N}\}, \{g_{i_s} : s \in \mathbb{N}\}$ tales que $t(g_{i_j}) \to a^-$,

$t(g_{i_s}) \to a^+$ pero $t(gg_{i_j}) \to \alpha$, $t(gg_{i_s}) \to \beta$ con $\alpha < \beta$. Si $t(h) \in (\alpha, \beta)$ entonces $t(g^{-1}h) = a$, o sea que $t(G) \cap (\alpha, \beta)$ tiene a lo sumo un elemento, por lo tanto $(\alpha, \beta)$ es o una componente conexa o unión de dos componentes de $\overline{t(G)}^c$, lo que implica $\alpha, \beta \in t(G)$. O sea, existen $h_1, h_2 \in G$ con $t(h_1) = \alpha$, $t(h_2) = \beta$; por lo tanto $t(gg_{i_j}) < t(h_1) < t(h_2) < t(gg_{i_s})$ para todo $s, j$, aplicando $g^{-1}$ resulta $t(g_{i_j}) < t(g^{-1}h_1) < t(g^{-1}h_2) < t(g_{i_s})$, contradiciendo que $t(g_{i_s})$ y $t(g_{i_j})$ tenían el mismo límite.
Finalmente extendemos $\phi(g)$ a $\mathbb{R}$ de forma que sea continua y sea afín en cada componente de $\overline{t(G)}^c$.
Con esta definición es claro que $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ en $t(G)$. Si $J = (t(r), t(s))$ es componente de $\overline{t(G)}^c$ entonces $\phi(gh)$ restringida a $J$ es el único mapa afín creciente que lleva $J$ en $(t(ghr), t(ghs))$, al igual que $\phi(g)\phi(h)$.
Es claro que la acción es fiel: si $g \neq 1_G$ entonces $\phi(g)(t(1_G)) = t(g) \neq t(1_G)$, o sea que $\phi(g) \neq id$.$\bullet$

Una consecuencia inmediata del teorema y de la observación (1) previa es:

**Corolario 2.4** *Si un grupo $G$ es numerable, son equivalentes:*
*$G$ es ordenable,*
*$G$ admite una acción fiel en $\mathbb{R}$ por homeomorfismos que preservan orientación.*

La acción $\phi$ que se muestra en el teorema se denomina la realización dinámica de $G$ por $\prec$. La definición que dimos de la realización dinámica depende de la enumeración; sin embargo, puede probarse que dos acciones dadas por el mismo orden con distintas enumeraciones son conjugadas.
Como vimos, la realización dinámica verifica $\phi(g)(t(h)) \neq t(h)$ para todo $g \neq 1_G$ y para todo $h \in G$, o sea que la acción restringida a $t(G)$ es libre. Por lo tanto, un corolario del teorema es que si un grupo numerable actúa en $\mathbb{R}$ por homeomorfismos que preservan orientación entonces admite una acción que posee una órbita en la cual el grupo actúa libremente.
El corolario 2.4 nos da una equivalencia entre una propiedad dinámica del grupo (actuar fielmente por homeomorfismos en $\mathbb{R}$) y una propiedad algebraica (ser ordenable). Una pregunta que puede surgir es: ¿existirá alguna propiedad algebraica de grupos equivalente a que el grupo actúe de forma diferenciable? Un resultado en este sentido lo da Thurston en [19], donde se prueba que $Difeo^1_+([0,1])$ es localmente indicable (o sea, todo subgrupo finitamente generado de él admite un morfismo no trivial a $(\mathbb{R}, +)$); en teoría de órdenes esto es equivalente a que admita un $C$-orden (ver [14] para la definición de $C$-orden y la demostración de esta afirmación). Sin embargo, un grupo localmente indicable no necesariamente actúa de forma fiel y $C^1$ en $(0,1)$, como lo muestra el ejemplo dado por Navas en [13]. En conclusión, no todo grupo que actúe en $(0,1)$ admite una acción $C^1$; aunque sí está probado (ver [5] o la proposición 2.87 en [15]) que toda acción de un grupo numerable en $S^1$ o $[0,1]$ es conjugada a una acción por homeomorfismos Lipschitz.

**Proposición 2.5** *Sea $G$ un grupo, $H \lhd G$. Si los grupos $H$ y $G/H$ son ordenables entonces $G$ es ordenable.*

*Demostración:* Si $G/H$ tiene cono positivo $P_1$ y $H$ tiene cono positivo $P_2$, definimos el cono positivo de $G$ como $P = \pi^{-1}(P_1) \cup P_2$, donde $\pi : G \to G/H$ es la proyección canónica. No es difícil probar que $P$ es un semigrupo y que todo elemento distinto de la identidad en $G$ está en $P$ o en $P^{-1}$ y nunca en ambos. $\bullet$

Utilizando el corolario 2.4 concluimos:

**Corolario 2.6** *Si un grupo $G$ es numerable y $H$ es un subgrupo normal en $G$ tal que tanto $H$ como $G/H$ actúan fielmente por homeos que preservan orientación en $\mathbb{R}$ entonces existe una acción fiel de $G$ en $Homeo_+(\mathbb{R})$.*

El orden obtenido por la proposición 2.5 hace de $H$ un subgrupo convexo de $G$, esto significa que si $h \in H$ y $g \in G$ verifican $id \preceq g \preceq h$ entonces $g \in H$. Puede probarse que la realización dinámica $\phi$ dada por un orden de este tipo tiene ciertas propiedades especiales. Esto lo veremos más adelante en un caso particular.

**Observación:** Un caso particular del corolario 2.6 es cuando $G$ contiene un subgrupo normal $H$ y un subgrupo $K$ numerable no necesariamente normal tales que $G = KH$ y $K \cap H = \{1_G\}$ (o sea que $G$ es el producto cruzado $K \ltimes H$). Construiremos explícitamente la acción de $G$ en este caso.

Supongamos que $\gamma : H \to Homeo_+([0,1])$ y $\eta : K \to Homeo_+(\mathbb{R})$ son acciones fieles, esta última representación verificando que actúa libremente en la órbita de 0.

Tomamos $\{l_k : k \in K\}$ una sucesión tal que la suma de sus elementos sea finita. Definimos $I_k$ como una copia del intervalo $[0, l_k]$; para cada $i, j \in K$ la función $\psi_j^i : I_j \to I_i$ es el homeomorfismo afín $M_{l_j/l_i}$ (observar que $\psi_l^j \psi_s^l = \psi_s^j$ para todos los $s, j, l \in K$), $\mathbb{R}_C$ una copia de $\mathbb{R}$. Para cada $k \in K$ "agregamos" el intervalo $I_k$ en $\eta(k)(0)$, logrando así $\tilde{\mathbb{R}} = \cup_{k \in K} I_k \cup \mathbb{R}_C$ un espacio topológico homeomorfo a la recta.

La idea es que $K$ actúe en $\mathbb{R}_C$ como $\eta$ y por medio de los $\psi_i^j$ en $I_i$; la acción de $H$ será trivial en $\mathbb{R}_C$ y se valdrá de los $\psi_i^j$ y de $\gamma$ para actuar en $I_i$.
La acción $\phi : G \to Homeo_+(\tilde{\mathbb{R}})$ está dada por:

* restringida a $\mathbb{R}_C$, $\phi(kh) = \eta(k)$;

* en $I_j$, $\phi(kh) = \psi_0^{kj} \gamma(j^{-1}hj) \psi_j^0$.

Cuando evaluamos $\phi$ en $h \in H$ nos queda: $\phi(h) = id$ en $\mathbb{R}_C$ y $\phi(h) = \psi_0^c \gamma(c^{-1}hc) \psi_c^0$ en $I_c$, puede probarse que es un mapa continuo en $\tilde{\mathbb{R}}$. Si miramos $k \in K$ se obtiene: $\phi(k) = \eta(k)$ restringiéndonos a $\mathbb{R}_C$ y $\phi(k) = \psi_c^{kc}$ en $I_c$, esto también es un homeomorfismo de $\tilde{\mathbb{R}}$.

Veamos que $\phi$ es efectivamente una representación.
Sean $k_1, k_2 \in K$, $h_1, h_2 \in H$, entonces $(k_1h_1)(k_2h_2) = (k_1k_2)(k_2^{-1}h_1k_2h_2)$, donde $k_1k_2 \in K$ y $k_2^{-1}h_1k_2h_2 \in H$. Por lo tanto tenemos que $\phi((k_1h_1)(k_2h_2)) = \eta(k_1k_2)$ en $\mathbb{R}_C$ y $\phi((k_1h_1)(k_2h_2)) =$ $\psi_0^{k_1k_2c} \gamma(c^{-1}k_2^{-1}h_1k_2h_2c) \psi_c^0$ en $I_c$.
Si $x \in \mathbb{R}_C$ entonces $\phi((k_1h_1)(k_2h_2))(x) = \eta(k_1k_2)(x) = \eta(k_1)(\eta(k_2)(x)) = \phi(k_1h_1)(\phi(k_2h_2)(x))$.
Si $x \in I_c$ entonces $\phi(k_2h_2)(x) = \psi_0^{k_2c}(\gamma(c^{-1}h_2c)\psi_c^0(x)) \in I_{k_2c}$; observando que en $I_{k_2c}$ se verifi-

ca $\phi(k_1h_1) = \psi_0^{k_1k_2c}\gamma(c^{-1}k_2^{-1}h_1k_2c)\psi_{k_2c}^0$, se concluye que $\phi((k_1h_1)(k_2h_2)) = \phi(k_1h_1)\phi(k_2h_2)$ en el intervalo $I_c$.•

## 2.4. Teorema de Hölder

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema de Hölder, formulado a comienzos del siglo XX y considerado fundacional en la teoría de grupos ordenables.
Como mostramos en la sección anterior, los órdenes están relacionados con las acciones en $\mathbb{R}$. El teorema de Hölder se refiere a órdenes en grupos, veremos que de él se concluye un teorema relativo a acciones.

**Proposición 2.7** *Sea $\Gamma$ un grupo que actúa libremente en $\mathbb{R}$. Entonces $\Gamma$ admite un orden $\preceq$ total invariante a izquierda y derecha y arquimedeano (dados $g, h \in \Gamma \setminus \{id\}$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $g^n \succ h$).*

*Demostración:* La idea es utilizar el orden que definimos en el punto (1) del teorema 2.3.
En este caso en particular podemos definir el orden $\preceq$ por: $g \prec h$ si $g(x) < h(x)$ para algún $x$ (equivalentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que la acción es libre). No es difícil verificar que este orden es invariante a ambos lados. El conjunto $\{g^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ no está acotado inferior ni superiormente, por lo tanto el orden es arquimedeano. •

El teorema de Hölder nos habla del recíproco de la proposición anterior. Para nuestra prueba necesitamos mostrar antes un lema básico de análisis.

**Lema 2.8** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de reales. Supongamos que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|a_{m+n} - a_m - a_n| < C$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.
Entonces existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n - nL| < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Demostración:* Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el intervalo $I_n = [\frac{a_n - C}{n}, \frac{a_n + C}{n}]$. Utilizando inducción en $m$ puede probarse que $|a_{mn} - ma_n| \leq (m-1)C$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. De aquí concluimos que $\frac{a_{mn}+C}{mn} \leq \frac{a_n+C}{n}$ y $\frac{a_{mn}-C}{mn} \geq \frac{a_n-C}{n}$.
O sea que, cualesquiera sean $n, m \in \mathbb{N}$ se tendrá $I_{mn} \subseteq I_n$. Podemos entonces utilizar la propiedad de intersección finita para deducir que $\cap I_n \neq \emptyset$. Esta intersección consta de un elemento, que es el $L$ buscado. •

El siguiente es el teorema de Hölder.

**Teorema 2.9** *Si un grupo admite un orden total invariante a izquierda y derecha y arquimedeano, entonces es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.*

*Demostración:* Sea $G$ un grupo no trivial que admite un orden $\preceq$. Fijamos $f \in G$, $f \succ id$.
Para cada $g \in G$, $p \in \mathbb{N}$ existe un único $q(p) \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{q(p)} \preceq g^p \prec f^{q(p)+1}$. Observemos que, por ser $\prec$ un orden invariante a ambos lados, se tiene que $q(p_1) + q(p_2) \leq q(p_1 + p_2) < q(p_1) + q(p_2) + 2$ para todos los $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, el lema previo nos da la existencia de $L \in \mathbb{R}$ tal que $|q(p) - pL| \leq 1$ para todo $p \in \mathbb{N}$, y por ende la existencia del $lim_{p\to\infty}\frac{q(p)}{p}$.

Llamamos $\phi(g)$ a este límite.
Mostraremos que el mapa $\phi : G \to \mathbb{R}$ es un morfismo. Sean $g_1, g_2 \in G$, suponiendo $g_1 g_2 \preceq g_2 g_1$ es sencillo probar (recordando que el orden es invariante a ambos lados) que $g_1^n g_2^n \preceq (g_1 g_2)^n \preceq g_2^n g_1^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si $p, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ verifican $f^{q_i} \preceq g_i^p \prec f^{q_i+1}$ entonces $f^{q_1+q_2} \preceq g_1^p g_2^p \preceq (g_1 g_2)^p \preceq g_2^p g_1^p \prec f^{q_1+q_2+2}$. Tomando límite concluimos que $\phi(g_1) + \phi(g_2) = lim_p \frac{q_1+q_2}{p} \leq \phi(g_1 g_2) \leq lim_p \frac{q_1+q_2+1}{p} = \phi(g_1) + \phi(g_2)$, o sea que $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) + \phi(g_2)$.
Falta ver que $\phi$ es inyectivo. Para ello es bueno observar primero que $\phi$ es creciente y verifica $\phi(g^n) = n\phi(g)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $h \in G$, $h \neq id$ entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $h^n \succ f$. Aplicando $\phi$ obtenemos $n\phi(h) = \phi(h^n) \geq \phi(f) = 1$, por lo que $\phi(h) \neq 0$. •

**Observación:** La hipótesis de invariancia a derecha es redundante en el teorema, ya que todo orden arquimedeano invariante a izquierda es también invariante a derecha.
Para mostrar esto, recordar la observación (4) al comienzo de la sección 2.3, según la cual debemos probar que el cono positivo es invariante por conjugación. Sea $\preceq$ un orden total sobre $G$, invariante a izquierda y arquimedeano, sean $P, N$ sus conos positivo y negativo. Dado $g \in P$, $h \in G$ debemos mostrar que $hgh^{-1} \in P$. Vemos primero el caso en que $h \in N$ y suponemos $hgh^{-1} \notin P$, sea entonces el menor $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $h^{-1} \prec g^n$ (existe por ser el orden aquimedeano); usando que $hgh^{-1} \prec id$ y que $\prec$ es invariante a izquierda deducimos que $h^{-1} \prec g^{-1}h^{-1} \prec g^{n-1}$, contradiciendo la definición de $n$. Resta ver el caso $h \in P$, razonemos nuevamente por absurdo, suponiendo $hgh^{-1} \notin P$; tenemos entonces $hg^{-1}h^{-1} \in P$ y, usando el primer caso, concluimos $g^{-1} = h^{-1}(hg^{-1}h^{-1})h \in P$, lo que contradice que $g \in P$.
Esta demostración que acabamos de dar es debida a Conrad, aparece en la página 49 de [15]. Una prueba dinámica de esta propiedad puede leerse en [14].

A partir del teorema anterior acerca de órdenes en grupos podemos concluir el siguiente teorema acerca de acciones en grupos:

**Teorema 2.10** *Si $G$ es un subgrupo de $Homeo(\mathbb{R})$ tal que ningún $g \in G \setminus \{id\}$ posee puntos fijos entonces existe un morfismo inyectivo $\phi : G \to (\mathbb{R}, +)$. Además, existe $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente sobreyectiva tal que $\psi g = T_{\phi(g)} \psi$ ($T_r$ denota la traslación $x \mapsto x + r$). Si $G$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ entonces podemos tomar $\psi$ de forma que sea un homeomorfismo.*

*Demostración:* Utilizando la proposición 2.7 y el teorema previo podemos deducir la existencia de un morfismo inyectivo $\phi : G \to (\mathbb{R}, +)$. Recordemos que todos los subgrupos de $(\mathbb{R}, +)$ no isomorfos a $\mathbb{Z}$ son densos.

Si $\phi(G) \cong \mathbb{Z}$, tomamos $g \in G$ tal que $g(0) > 0$ y $< g >= G$. Definimos $\psi : [0, g(0)] \to [0, \phi(g)]$ como un homeomorfismo cualquiera que preserva orientación; luego extendemos $\psi$ a $[g^n(0), g^{n+1}(0)]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$: $\psi(g^n(x)) = \psi(x) + n\phi(g)$ si $x \in [0, g(0)]$. Por construcción $\psi$ conjuga $g$ con $T_{\phi(g)}$; como $g$ genera $G$, $\psi$ conjuga toda la acción.

Si $\phi(G)$ es denso en $\mathbb{R}$ definimos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $\psi(x) = sup\{\phi(h) : \ h \in G, \ h(0) \leq x\}$. Es claro que $\psi$ es creciente.
Veamos que $\psi g = T_{\phi(g)} \psi$ para todo $g \in G$: $\psi(g(x)) = sup\{\phi(h) : \ h(0) \leq g(x)\} = sup\{\phi(h) : g^{-1}h(0) \leq x\} = sup\{\phi(gk) : \ k(0) \leq x\} = sup\{\phi(k) : \ k(0) \leq x\} + \phi(g) = \psi(x) + \phi(g)$.
Para probar que $\psi$ es sobreyectiva mostraremos primero que $\psi(\mathbb{R})$ es un conjunto invariante

por el grupo de traslaciones $\{T_{\phi(g)}: \ g \in G\}$. Sea $x \in \psi(\mathbb{R})$, entonces $x = \psi(y)$ para algún $y \in \mathbb{R}$, tenemos por lo tanto: $T_{\phi(g)}(x) = T_{\phi(g)}(\psi(y)) = \psi(g(y)) \in \psi(\mathbb{R})$. Ahora, si $\psi$ no fuese sobreyectiva debería existir un intervalo abierto $I$ tal que $I \cap \psi(\mathbb{R}) = \emptyset$, por ser $\psi$ creciente. Como $\psi(\mathbb{R})$ es invariante tendríamos $T_{\phi(g)}(I) \cap \psi(\mathbb{R}) = \emptyset$ para todo $g \in G$. Como $\{\phi(g): \ g \in G\}$ es denso concluiríamos que $\psi(\mathbb{R}) = \emptyset$, arribando a un absurdo. $\bullet$

## 2.5. Teorema de Margulis

El siguiente teorema fue probado por Margulis en [11], respondiendo una pregunta de Ghys. Nosotros haremos una prueba muy parecida a la que el mismo Ghys escribe en [8].

**Teorema 2.11** *Sea $\Gamma$ un subgrupo de $Homeo_+(S^1)$. Entonces ocurre una de las siguientes afirmaciones (o ambas):*

- *$\Gamma$ contiene un subgrupo libre a dos generadores,*
- *existe una medida invariante por todos los elementos de $\Gamma$.*

La prueba es muy interesante y consta de varias etapas.

**Lema 2.12** ***(Ping-pong)*** *Sea $X$ un conjunto cualquiera, $A, B \subseteq X$ disjuntos no vacíos. Si $f, g : X \to X$ son dos biyecciones que verifican $f^n(A) \subseteq B$, $g^n(B) \subseteq A$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ entonces $< f, g >$ es un grupo libre a dos generadores.*

*Demostración:* Sea $f^{m_1}g^{n_1}...f^{m_k} \in < f, g >$ con ningún $m_i, n_i$ nulo. Entonces es fácil observar que $f^{m_1}g^{n_1}...f^{m_k}(A) \subseteq B$, por lo que $f^{m_1}g^{n_1}...f^{m_k}$ no es la identidad. Si tomamos $f^{m_1}g^{n_1}...f^{m_k}g^{n_k} \in < f, g >$ con $m_1, n_k$ no nulos, basta conjugar por $f$ (si $m_1 \neq -1$) o por $f^{-1}$ (si $m_1 \neq 1$) y obtenemos un elemento como el de arriba que ya sabemos no es la identidad.$\bullet$

En el caso del círculo, si tenemos $f, g \in Homeo_+(S^1)$, intervalos cerrados disjuntos $I, I', J, J'$ tales que $g(I) = S^1 \setminus int(J)$, $f(I') = S^1 \setminus int(J')$, podemos tomar $A = I \cup J$, $B = I' \cup J'$ y utilizar el lema del ping-pong para concluir que $< f, g >$ es libre.

**Caso 1:** Mostraremos primero el teorema en el caso que cada órbita es densa y se cumple lo siguiente:

**Definición:** La acción de $\Gamma$ sobre $S^1$ se dice fuertemente expansiva si existe una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos de $S^1$ y una sucesión $\{\gamma_n\} \subseteq \Gamma$ de forma que $long(I_n) \to 0$ y $long(S^1 \setminus \gamma_n(I_n)) \to 0$.

Usando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que los bordes de $I_n$ convergen a $x \in S^1$, así como los extremos de $\gamma_n(I_n)$ convergen a $y$. Podemos además asumir $x \neq y$, ya que de no ser así podemos reemplazar la sucesión $\{\gamma_n\}$ por $\{\beta\gamma_n\}$, siendo $\beta \in \Gamma$ tal que $\beta(x) \neq x$ (la existencia de dicho $\beta$ se debe a que no hay punto fijo global ya que estamos suponiendo que toda órbita es densa).

Afirmamos que por ser la acción de $\Gamma$ minimal existe $\gamma \in \Gamma$ con $\gamma(x), \gamma(y), x, y$ todos distintos.

Supongamos por absurdo que no hay dicho $\gamma$, entonces para todo $f \in \Gamma$ ocurre: $f(x) = x$, $f(x) = y$, $f(y) = y$ ó $f(y) = x$. Fijamos $g \in \Gamma$ tal que $g(x) = y$ (de no existir tal $g$, los puntos $x, y$ serían fijos por la acción de $\Gamma$). Dado $a \in S^1$ definimos el subgrupo $H_a = \{\omega \in \Gamma$ tal que $\omega(a) = a\}$. Todo $f$ que verifique $f(x) = y$ es de la forma $gh$, con $h \in H_x$ y todo $f$ que verifique $f(y) = x$ es de la forma $g^{-1}k$, con $k \in H_y$.
O sea que tenemos $\Gamma = gH_x \cup H_x \cup g^{-1}H_y \cup H_y$. Tomemos $\beta \in \Gamma$ con $\beta(x) \neq x, y$. Entonces $\beta \notin gH_x \cup H_x$ por lo que $\beta H_x \subseteq g^{-1}H_y \cup H_y$. Multiplicando por $\beta^{-1}$ a izquierda obtenemos $H_x \subseteq \beta^{-1}g^{-1}H_y \cup \beta^{-1}H_y$, y al realizar el producto de esto con $g$ deducimos $gH_x \subseteq g\beta^{-1}g^{-1}H_y \cup g\beta^{-1}H_y$. Por lo tanto $\Gamma = g\beta^{-1}g^{-1}H_y \cup g\beta^{-1}H_y \cup \beta^{-1}g^{-1}H_y \cup \beta^{-1}H_y \cup g^{-1}H_y \cup H_y$, lo que hace que la órbita de $y$ por $\Gamma$ sea finita, llegando a un absurdo, ya que supusimos que toda órbita es densa.

Fijamos $\gamma$ tal que $x, y, \gamma(x), \gamma(y)$ son todos distintos. Entonces tomando $n$ suficientemente grande obtenemos que los intervalos $I = I_n$, $J = S^1 \setminus \gamma_n(I_n)$, $I' = \gamma(I_n)$, $J' = \gamma(J)$ son disjuntos y definiendo $f = \gamma\gamma_n\gamma^{-1}$ y $g = \gamma_n$ llegamos usando el ping-pong (lema 2.12) a un subgrupo de $\Gamma$ libre a dos generadores.

**Caso 2:** La expansividad fuerte es una exigencia muy grande para la acción, por eso demostraremos ahora el teorema para el caso en que la acción es minimal y cumple:

**Definición:** La acción se dice expansiva si existen $c > 0$, una sucesión de intervalos $\{I_n\}$, una sucesión $\{\gamma_n\} \subseteq \Gamma$ tales que $long(I_n) \to 0$ y $long(\gamma_n(I_n)) \geq c\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Decimos que un intervalo $J \subseteq S^1$ es contractible si existe $\{g_n\} \subseteq \Gamma$ de forma que $long(g_n(J)) \to 0$. Por ser la acción expansiva se obtiene la existencia de un intervalo contractible (basta tomar $J$ tal que $\bar{J} \subseteq int(I)$, con $I$ límite de una subsucesión $\gamma_{n_k}(I_{n_k})$, y $g_k = \gamma_{n_k}^{-1}$). Como además la acción es minimal se obtiene que todo $x \in S^1$ está contenido en un intervalo contractible (dado $x$ existe $g \in \Gamma$ tal que $g(x) \in J$ contractible, entonces $g^{-1}(J)$ es contractible y contiene a $x$).

Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos $\tilde{\theta}(x) = sup\{y/$ el intervalo $\pi[x, y]$ es contractible $\}$. La función $\tilde{\theta}$ es el levantado de una función $\theta : S^1 \to S^1$. Vale observar que, como todo punto está metido en un intervalo contractible, si $\theta = Id$ entonces todo intervalo cuya clausura no sea todo $S^1$ es contractible, por lo que la acción es fuertemente expansiva.
El mapa $\theta$ conmuta con todos los elementos de $\Gamma$: dados $\gamma \in \Gamma$, $x \in S^1$ se tiene que el intervalo $[\gamma(x), y]$ es contractible sii $[x, \gamma^{-1}(y)]$ lo es.
El mapa $\theta$ es estrictamente creciente: si hubiera un intervalo $J$ tal que $\theta\mid_J$ es constante, entonces para todo $\gamma \in \Gamma$ se tendría (por conmutar $\gamma$ con $\theta$) que $\theta\mid_{\gamma(J)}$ también sería constante, por lo tanto (usando la minimalidad de la acción) se tendría que $\theta$ tomaría un único valor, este valor constante sería invariante por la acción de $\Gamma$ (sea $y$ dicho valor, $f \in \Gamma$, entonces $f(y) = f\theta(y) = \theta f(y) = y$), esto contradice la hipótesis de minimalidad de la acción.
Para ver que $\theta$ es continuo, por ser creciente, basta probar que es sobreyectivo: si tuviéramos un intervalo $J$ que no fuera alcanzado por $\theta$ entonces para todo $\gamma \in \Gamma$ tampoco $\gamma(J)$ sería alcanzado, utilizando la minimalidad esto nos da una contradicción.

Tenemos entonces que $\theta \in Homeo_+(S^1)$. Demostremos que $\Omega(\theta)$ es invariante por $\Gamma$: si $x \in \Omega(\theta)$, entonces existe $\{n_k\}$ tal que $\theta^{n_k}(x) \to x$, si $\gamma \in \Gamma$ entonces $lim_k \theta^{n_k}\gamma(x) = lim_k \gamma\theta^{n_k}(x) = \gamma(x)$, por lo que $\gamma(x) \in \Omega(\theta)$. Por la minimalidad de la acción concluimos que $\Omega(\theta) = S^1$, o sea que $\theta$ es conjugada a una rotación irracional o existe $n \in \mathbb{N}$ con $\theta^n = Id$. Si $\theta = hR_\alpha h^{-1}$ con $h \in Homeo(S^1)$ y $\alpha$ irracional, entonces todos los elementos de $h^{-1}\Gamma h$ conmutan con $R_\alpha$ (porque $\Gamma$ conmuta con $\theta$) y por lo tanto $h^{-1}\Gamma h$ sería subgrupo de las rotaciones, contradiciendo la expansividad de $\Gamma$.

Concluimos que $\theta^n = Id$. Pasamos la acción de $\Gamma$ a $S^1/\theta$ (podemos pasar al cociente porque la acción conmuta con $\theta$), que es homeomorfo a $S^1$. Ahora la acción es fuertemente expansiva (porque en el cociente $\theta$ es la identidad) y sigue siendo minimal. Con esto se concluye que $\Gamma$ contiene un subgrupo libre a dos generadores.

**Caso 3:** Supongamos ahora que la acción es minimal y no expansiva. Vale observar que la negación de la expansividad es la equicontinuidad. Por lo tanto, el teorema de Arzelà-Ascoli nos dice que $\bar{\Gamma} \subseteq Homeo_+(S^1)$ es compacto. Tomamos la medida de Haar $\eta$ (la única medida de probabilidad en $\bar{\Gamma}$ invariante por $\bar{\Gamma}$), entonces $\mu$ definida por $\mu(A) = \int_{\bar{\Gamma}} Leb(g(A))d\eta$ es una probabilidad sobre los borelianos de $S^1$ con soporte total, sin átomos e invariante por la acción de $\bar{\Gamma}$. Con esto ya tenemos probado el teorema cuando la acción es minimal, el siguiente resultado nos agrega información.

**Lema 2.13** *Sea $G$ un subgrupo de $Homeo_+(S^1)$ que deja invariante una medida de probabilidad de soporte total y sin átomos. Entonces $G$ es conjugado a un subgrupo de rotaciones.*

*Demostración:*
Sea $\mu$ la medida invariante por $G$.
Definimos $\varphi : S^1 \to [0,1)$ como $\varphi(x) = \mu[0,x]$, es una función continua biyectiva, pensando al codominio como $S^1$ resulta que $\varphi$ es un homeomorfismo.
Sea $I = (a,b)$ un intervalo en $S^1$, $g \in G$, entonces (las igualdades son módulo 1): $Leb(\varphi(I)) = \varphi(b) - \varphi(a) = \mu[a,b] = \mu[g(a), g(b)] = \varphi g(b) - \varphi g(a) = Leb(\varphi g(I))$. O sea: dados un intervalo $J \subseteq S^1$ y $g \in G$ se tiene $Leb(J) = Leb(\varphi g \varphi^{-1}(J))$. Por lo tanto, $Leb$ es una medida invariante por $\varphi G \varphi^{-1}$, por lo que este grupo está incluido en el conjunto de las rotaciones de $S^1$. •

Resumiendo lo anterior, hemos obtenido el siguiente resultado:

**Proposición 2.14** *Si $\Gamma$ es subgrupo de $Homeo_+(S^1)$ con órbitas densas entonces ocurre una y solo una de las siguientes afirmaciones:*

- *$\Gamma$ tiene un subgrupo libre a dos generadores,*
- *$\Gamma$ es conjugado a un grupo de rotaciones (en particular es abeliano).*

**Caso general:** El teorema ya está probado cuando $\Gamma$ actúa en forma minimal. Veamos qué ocurre cuando no es así.
Si $\Gamma$ tiene un minimal excepcional $K$, existe $\phi : S^1 \to S^1$ que semiconjuga $\Gamma$ a una acción minimal. Si en esta acción minimal tenemos una medida invariante $\mu$ con soporte total y sin átomos entonces la medida $\nu$ dada por $\nu(A) = \mu(\phi(A))$ está soportada en $K$ y es invariante por $\Gamma$.

Si en la acción semiconjugada tenemos dos elementos que verifican un ping-pong entonces (lema 2.12) $\Gamma$ contiene un subgrupo libre a dos generadores.
Si $\Gamma$ tiene una órbita finita $\{x_1, ..., x_n\}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$ es una medida invariante para $\Gamma$. $\bullet$

El teorema de Margulis es un resultado muy fuerte que tiene múltiples consecuencias. Nosotros utilizaremos la siguiente.

**Corolario 2.15** *Sean $f_1, ..., f_n \in Homeo_+(S^1)$ tales que $Per(f_i) \neq \emptyset$ para todo $i = 1, ..., n$. Supongamos que $G =< f_1, ..., f_n >$ no contiene un grupo libre a dos generadores. Entonces existe una órbita finita por $G$.*

*Demostración:*
Si la acción de $G$ fuera minimal entonces, según la proposición 2.14 tendríamos que $G$ es conjugado a un grupo de rotaciones. Como $G$ está generado por finitos elementos, todos con puntos periódicos, tendríamos que $G$ sería finito, contradiciendo la minimalidad de la acción.
Si el grupo $G$ admite un minimal excepcional $K$ entonces luego de semiconjugar la acción volvemos a caer en las hipótesis de la proposición 2.14, con lo que concluimos como en el caso denso que $G$ es finito, contradiciendo la minimalidad de la acción de $G$ en $K$.
Utilizando el teorema 2.1 concluimos que existe una órbita finita. $\bullet$

# Capítulo 3

# El grupo $BS(1,n)$

Los grupos de Baumslag-Solitar se definen por $BS(m,n) =< a, b/ab^m a^{-1} = b^n >$. Nosotros nos concentraremos en el estudio de los casos en que $m = 1$, $n > 1$. Un estudio de las acciones $C^2$ de $BS(m,n)$ en $S^1$ se hace en [7].
Cualquier elemento de $BS(1,n)$ puede escribirse como $a^k b^s a^l$, con $s,k,l \in \mathbb{Z}$ (esto se prueba en la proposición 5.1 de forma más general).

Dados $\alpha, c \in \mathbb{R}$ notaremos $M_c, T_\alpha \in$Af($\mathbb{R}$) como $M_c(x) = cx$ y $T_\alpha(x) = x+\alpha$. Vale observar que Af($\mathbb{R}$) pensado como un grupo de homeomorfismos de la recta puede conjugarse y llevarse a un grupo de funciones analíticas de $S^1$ con un punto fijo global.

**Proposición 3.1** *La función $\psi : \{a,b\} \to Af_+(\mathbb{R})$ dada por $\psi(a) = M_n$, $\psi(b) = T_1$ puede extenderse a un morfismo de grupos $\psi : BS(1,n) \to Af_+(\mathbb{R})$ inyectivo.*

*Demostración:*
El mapa $\psi$ se extiende a un morfismo: $\psi(a)\psi(b)\psi(a)^{-1} = M_n T_1 M_{1/n} = T_n = \psi(b)^n$.
El morfismo es inyectivo: $\psi(a^k b^s a^l) = T_{sn^k} M_{n^{l+k}} = Id$ si y solo si $s = 0$ y $k = -l$. •

A esta acción la llamamos la estándar. Esta representación es muy importante desde el punto de vista dinámico, como veremos más adelante. Además nos permite mostrar de forma sencilla algunas propiedades del grupo, ya que nos da una manera de ver el grupo dentro de $Af(\mathbb{R})$.

**Observaciones:**
(1) Se puede ver que $Im(\psi) = \{T_\beta M_\alpha : \ \alpha = n^k, \beta = r/n^s, \ r,k \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}\}$.
(2) El subgrupo $< a^s, b^t >$ es isomorfo a $BS(1,n^s)$ si $s \in \mathbb{Z}^+$: usando la acción estándar vemos que $< a^s, b^t > \simeq < M_{n^s}, T_t >$, al conjugar por $M_{1/t}$ obtenemos $< M_{n^s}, T_t > \simeq < M_{n^s}, T_1 > \simeq BS(1,n^s)$.

## 3.1. Acciones en $\mathbb{R}$ y $[0,1]$

**Lema 3.2** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $\gamma : BS(1,n) \to Homeo(X)$ es una representación entonces $Per(\gamma(b))$ es un conjunto invariante por $\gamma(a)$.*
*En particular, si $\eta : BS(1,n) \to Homeo_+(\mathbb{R})$ es una representación entonces $Fix(\eta(b))$ es un conjunto invariante por $\eta(a)$.*

*Demostración:*
Observemos primero que $\eta(a)(Per(\eta(b))) = Per(\eta(b))$. Si $\eta(b)^p(x) = x$ entonces $\eta(a)(x) = \eta(ab^p)(x) = \eta(b^{np}a)(x) = \eta(b)^{np}(\eta(a)(x))$, o sea que $\eta(a)(x)$ es fijo por $\eta(b)^{np}$.
De igual manera, si $\eta(b)^p(x) = x$ entonces $\eta(b)^p(\eta(a)^{-1}(x)) = \eta(b^pa^{-1})(x) = \eta(a^{-1}b^{np})(x) = \eta(a)^{-1}(x)$, así que $\eta(a)^{-1}$ también envía puntos periódicos de $\eta(b)$ en puntos periódicos de $\eta(b)$.
Cuando $X = \mathbb{R}$ y los homeomorfismos preservan orientación, los puntos periódicos son los fijos. $\bullet$

Los siguientes dos resultados aparecen en [17], donde se estudian los órdenes sobre $BS(1,n)$.

**Lema 3.3** *Sea* $\phi : BS(1,n) \to Af_+(\mathbb{R})$ *morfismo inyectivo.*
*Entonces* $\phi(b) = T_\alpha$, $\phi(a) = T_\beta M_n$; *con* $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
*En particular,* $\phi$ *es conjugada a la acción estándar.*

*Demostración:*
Sean $\alpha, \beta, s, t \in \mathbb{R}$ tales que $\phi(b) = T_\alpha M_s$, $\phi(a) = T_\beta M_t$.
Por lo tanto, $\phi(b^n) = \phi(b)^n = T_{(\alpha+s\alpha+...+s^{n-1}\alpha)}M_{s^n}$ y $\phi(aba^{-1}) = \phi(a)\phi(b)\phi(a)^{-1} = T_{(t\alpha+\beta-s\beta)}M_s$.
Por lo tanto, $s^n = s$ y $\alpha + s\alpha + ... + s^{n-1}\alpha = t\alpha + \beta - s\beta$. De la primera igualdad obtenemos $s = 1$; sustituyendo en la segunda igualdad obtenemos $n\alpha = t\alpha$, por ser $\alpha \neq 0$ (porque $\phi$ es fiel) se concluye $t = n$.
Es fácil ver que conjugando por $M_{1/\alpha}$ logramos que $a$ se corresponda con $T_1$. Luego conjugando por $T_{\beta/\alpha(n-1)}$ logramos que el punto fijo de $b$ se traslade a 0. $\bullet$

**Teorema 3.4** *Sea* $\phi : BS(1,n) \to Homeo_+(\mathbb{R})$ *una acción fiel sin punto fijo global.*
*(1) Si* $\phi(b)$ *no tiene punto fijo entonces* $\phi$ *es semiconjugada a la acción estándar.*
*(2) Si* $\phi(b)$ *tiene algún punto fijo entonces* $\phi(a)$ *no tiene puntos fijos y existe un intervalo* $I = (\alpha, \beta)$ *con* $\alpha, \beta$ *fijos por* $\phi(b)$ *tal que* $\phi(a)(I) \cap I = \emptyset$.

*Demostración:*
(1) Utilizando el lema previo, basta mostrar que $\phi$ es semiconjugada a una acción fiel por elementos del grupo afín.
Llamemos $H$ al grupo normal generado por $b$. El grupo $H$ está formado por los elementos de la forma $b^s$, $s \in \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ (donde $a^{-1}ba = b^{1/n}$ se interpreta como un elemento cuya potencia $n$-ésima es $b$), $H$ puede verse en la acción estándar como el conjunto de elementos que son traslaciones; utilizando dicha representación es fácil ver que $H \cong \mathbb{Z}[1/n]$.
Ya hemos comentado que todo elemento de $BS(1,n)$ puede escribirse como $a^tb^sa^r$, con $r, s, t \in \mathbb{Z}$. Como $a^{-r}b^sa^r \in H$ concluimos que todo elemento de $BS(1,n)$ se escribe como $a^ph$, con $p \in \mathbb{Z}, h \in H$.

Dado $g \in H$ existen $r, k \in \mathbb{Z}$ tales que $g^r = b^k$; por lo tanto, $\phi(g)$ no tiene punto fijo. O sea que la acción $\phi$ restringida a $H$ es libre y por lo tanto semiconjugada a una acción por traslaciones (teorema de Hölder, 2.10), este grupo de traslaciones es denso porque $H$ no es cíclico. Como el grupo de traslaciones preserva *Leb*, esto implica la existencia de una medida $\mu$ de Radon sin átomos invariante por la acción de $H$ (la preimagen de la medida de Lebesgue por la semiconjugación). El teorema 2.2 nos dice además que esta medida es única a menos de constantes.

Dado $f \in BS(1,n)$, llamamos $\phi(f)_*(\mu)$ a la medida definida por $\phi(f)_*(\mu)(B) = \mu(\phi(f)^{-1}(B))$. Si $g \in H$, $f \in BS(1,n)$ existe $\bar{g} \in H$ tal que $f^{-1}g = \bar{g}f^{-1}$ (porque $H \lhd BS(1,n)$). Dado un boreliano $A$: $\phi(f)_*(\mu)(\phi(g)(A)) = \mu(\phi(f^{-1}g)(A)) = \mu(\phi(\bar{g}f^{-1})(A)) = \mu(\phi(\bar{g})(\phi(f^{-1})(A))) = \mu(\phi(f^{-1})(A)) = \phi(f)_*(\mu)(A)$. Por lo tanto $\phi(f)_*(\mu)$ es una medida invariante por la acción de $H$ para cualquier $f \in BS(1,n)$, de lo que se desprende de la unicidad que $\phi(f)_*(\mu) = \lambda_f \mu$ para algún $\lambda_f \in \mathbb{R}^+$.
Dado $g = a^r h \in BS(1,n)$, $A$ un boreliano, se tiene $\mu(\phi(a^r h)^{-1}(A)) = \mu(\phi(h)^{-1}\phi(a)^{-r}(A)) = (\lambda_a)^r \mu(A)$. Si $\lambda_a = 1$, $\mu$ sería invariante por la acción de $BS(1,n)$ y por lo tanto existiría el morfismo $\tau_\mu : BS(1,n) \to \mathbb{R}$ (definido en la sección 2.2) y se tendría $\tau_\mu(b^{n-1}) = \tau_\mu(aba^{-1}b^{-1}) = 0$, lo que implicaría que $\phi(b)$ tiene algún punto fijo.
Hemos deducido entonces que $\lambda_h = 1$ para todo $h \in H$ (porque $\mu$ es invariante por la acción de $H$), $\lambda_a \neq 1$. No es difícil observar que el mapa que manda $g$ en $\lambda_g$ es un morfismo de $BS(1,n)$ en $(\mathbb{R}^+, \times)$.

Definimos el mapa $A$ de $BS(1,n)$ en $Af_+(\mathbb{R})$: $A(g)(x) = \frac{1}{\lambda_g}x + \mu[0, \phi(g)(0)]$, suponiendo que $\mu[c,d] = -\mu[d,c]$ si $d < c$. Verificar que $A$ es un morfismo es sencillo, recordando que si $h, g \in BS(1,n)$ entonces: $\lambda_{gh} = \lambda_g \lambda_h$ y $\mu[0, \phi(h)(0)] = \mu(\phi(g)^{-1}[\phi(g)(0), \phi(gh)(0)]) = \lambda_g \mu[\phi(g)(0), \phi(gh)(0)]$.
Veamos ahora que la representación $A$ es fiel. Si $g \in BS(1,n)$ entonces $g = a^t h$, $t \in \mathbb{Z}$, $h \in H$. Si $A(g) = id$ entonces $1 = \lambda_g = \lambda_{a^t}\lambda_h = (\lambda_a)^t$ o sea $t = 0$; tenemos entonces $0 = \mu[0, \phi(g)(0)] = \mu[0, \phi(h)(0)]$ lo que implica $h = id$ (porque $\phi(h)$ no tiene puntos fijos para todo $h \in H$).
Para finalizar la demostración de este punto resta ver que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \mu[0,x]$ semiconjuga la acción $\phi$ con $A$: $F(\phi(g)(x)) = \mu[0, \phi(g)(x)] = \mu[0, \phi(g)(0)] + \mu[\phi(g)(0), \phi(g)(x)] = \mu[0, \phi(g)(0)] + \frac{1}{\lambda_g}\mu[0,x] = A(g)(F(x))$. El mapa $F$ es evidentemente creciente, además es continuo porque $\mu$ no tiene átomos.

(2) Se concluye del lema 3.2 que $\phi(a)$ no tiene puntos fijos: si los tuviera, tomamos $z \in Fix(\phi(b))$ y resulta que $\lim_{s \to +\infty} \phi(a)^s(z) = x_0 \in Fix(\phi(a))$ (o esto ocurre con $s \to -\infty$). Como $\phi(a)^s(z) \in Fix(\phi(b))$ para todo $s \in \mathbb{Z}$ se concluye por continuidad que $x_0$ es fijo por $\phi(b)$, contradiciendo la no existencia de puntos fijos globales. Supondremos en adelante que $\phi(a)(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (si es menor la demostración es idéntica).
Por ser fiel la acción, $\phi(b) \neq id$, supongamos que 0 no es fijo por $\phi(b)$. Definimos $x_1 := inf\{x \in Fix(\phi(b)),\ x > 0\}$; $x_{-1} := sup\{x \in Fix(\phi(b)),\ x < 0\}$.
Vemos que $\phi(a)(x_{-1}) > x_1$: de lo contrario, $\phi(a)(x_{-1}) \in (x_{-1}, x_1)$, lo que contradice la definición de $x_{-1}$ (si $\phi(a)(x_{-1}) < 0$) o la de $x_1$ (si $\phi(a)(x_{-1}) > 0$) porque $\phi(a)(x_{-1}) \in Fix(\phi(b))$. Así, el intervalo $I = (x_{-1}, x_1)$ tiene como extremos a elementos de $Fix(\phi(b))$ y verifica $\phi(a)(I) \cap I = \emptyset$. •

**Ejemplo:**
Veamos cómo puede ocurrir el caso (2). Para eso utilicemos el corolario 2.6 y la observación posterior, recordando que $BS(1,n) =< a > H$, donde $H$ es el grupo normal generado por $b$. El subgrupo $H$ es isomorfo a $\mathbb{Z}[1/n]$, un subgrupo de $\mathbb{R}$; por lo tanto podemos pensarlo como subgrupo de traslaciones; es decir existe un morfismo inyectivo $\psi : H \to Homeo_+(\mathbb{R})$ donde $\psi(h)$ es una traslación para todo $h \in H$. Tomando un homeomorfismo $g : \mathbb{R} \to (0,1)$ podemos

conjugar la acción $\psi$ y llevarla a una acción $\tilde{\psi} : H \to Homeo_+([0,1])$, que es evidentemente fiel.
Intentemos ahora definir $\theta : BS(1,n) \to Homeo_+(\mathbb{R})$. Primero definimos $\theta(a) = T_1$. Para definir $\theta(h)$, $h \in H$ hacemos lo siguiente: $\theta(h)(x) = \tilde{\psi}(h)(x)$ si $x \in [0,1]$; $\theta(h)(x) = T_k\tilde{\psi}(a^{-k}ha^k)(T_{-k}(x))$ si $x \in [k, k+1]$. Cualquier elemento $g \in BS(1,n)$ se escribe de manera única como $a^s h$, con $s \in \mathbb{Z}$, $h \in H$; definimos entonces $\theta(a^s h) = T_s\theta(h)$.

Para ver que realmente es una representación observemos lo siguiente: si $s, t \in \mathbb{Z}$, $g, h \in H$ entonces $a^s g a^t h = a^{s+t}a^{-t}ga^t h$ y $a^{-t}ga^t h \in H$. Sean ahora $x \in [0,1]$, $k \in \mathbb{Z}$:

(I) $\theta(a^s g a^t h)(x+k) = \theta(a^{s+t}a^{-t}ga^t h)(x+k) = T_{s+t}\theta(a^{-t}ga^t h)(x+k) =$

$T_{s+t+k}\tilde{\psi}(a^{-t-k}ga^t h a^k)(x)$;

(II) $\theta(a^s g)(\theta(a^t h)(x+k)) = \theta(a^s g)(T_t\theta(h)(x+k)) = \theta(a^s g)(T_t T_k\tilde{\psi}(a^{-k}ha^k)(x)) =$

$T_s\theta(g)(T_t T_k\tilde{\psi}(a^{-k}ha^k)(x)) = T_{s+t+k}\tilde{\psi}(a^{-t-k}ga^{t+k})\tilde{\psi}(a^{-k}ha^k)(x) =$

$T_{s+t+k}\tilde{\psi}(a^{-t-k}ga^t h a^k)(x)$ (esta última igualdad se da porque $\tilde{\psi}$ es morfismo).

De (I) y (II) concluimos que $\theta$ es representación.

La acción es fiel: sea $g = a^s h$ con $s \in \mathbb{Z}, h \in H$. Dado $x \in (0,1)$ se tiene $\theta(a^s h)(x) = T_s\theta(h)(x) \in (s, s+1)$; por lo tanto para que $\theta(g)$ sea la identidad debe ocurrir $s = 0$. Si $s = 0$ y $h \neq id$ entonces $\theta(h) \neq id$ porque $\theta = \tilde{\psi}$ si restringimos la acción de $H$ a $[0,1]$ (y $\tilde{\psi}$ es fiel).

Es claro que estamos en el caso (2) del teorema, ya que $\theta(b)$ fija todos los enteros. Además, $(0,1)$ es un intervalo errante por $\theta(a)$.

Puede lograrse que $\theta(BS(1,n)) \subseteq Dif^\infty(\mathbb{R})$; para eso debe tomarse el homeomorfismo $g : \mathbb{R} \to (0,1)$ de forma que el conjugado por $g$ de toda traslación resulte una función $C^\infty$ de $[0,1]$ que sea infinitamente tangente a la identidad en 0 y 1 (según aparece en la página 188 de [15] existe una $g$ que hace $gfg^{-1}$ infinitamente tangente a la identidad en [0,1] para todo $f \in Af_+(\mathbb{R})$).•

Los siguientes resultados aparecen en [9]. En la demostración del primero de ellos se utiliza un argumento proveniente de [4].

**Teorema 3.5** *Sea $\phi : BS(1,n) \to Difeo^1_+([0,1])$ una acción fiel. Entonces $\phi$ es semiconjugada a la acción estándar.*

*Demostración:* Llamaremos $f = \phi(b)$, $h = \phi(a)$.
Podemos suponer que $\phi$ no tiene puntos fijos globales, si los tuviera, tomamos la acción restringida a una componente conexa de $(Fix(f) \cap Fix(h))^c$.
Según el teorema 3.4, basta probar que no es posible que la acción tenga un intervalo con extremos fijos por $f$ y errante por $h$.

Supondremos por absurdo que este intervalo $I$ existe, tomémoslo de forma que en su interior no tenga puntos fijos de $f$.
Recordando que $h(Fix(f)) = Fix(f)$ (lema 3.2), resulta que para todo $l \in \mathbb{Z}$, $h^{-l}(I)$ también es un intervalo errante por $h$ con extremos fijos por $f$ y sin puntos fijos en su interior. Además, por ser errante, se tiene que $\lim_{l\to\infty} long(h^{-l}(I)) = 0$.

Fijamos $\varepsilon > 0$ tal que $(1-\varepsilon)^2 > 3/4$.
Si $h^{-l}(I) = (u_l, v_l)$ entonces tenemos $f(v_l) - f(u_l) = v_l - u_l$, por lo que existe $c_l \in (u_l, v_l)$ con $f'(c_l) = 1$. Usando la continuidad uniforme de $f'$ logramos para todos $x \in h^{-l}(I)$, $l$ suficientemente grande:

$$f'(x) \geq 1 - \varepsilon \qquad (\mathbf{C}_1)$$

Usando la continuidad uniforme de $h'$ podemos lograr para todos $x, y \in h^{-l}(I)$, $l$ suficientemente grande:

$$\frac{h'(x)}{h'(y)} \geq 1 - \varepsilon \qquad (\mathbf{C}_2)$$

Fijamos $l > 0$ de manera que si $s \geq l$ entonces se cumplen ambas condiciones.
El intervalo $h^{-l}(I)$ tiene extremos fijos por $f$, pero ningún punto del interior de dicho intervalo es fijo por $f$. Sea $z$ en el interior de $h^{-l}(I)$, llamaremos $J = (z, f(z))$; se tiene $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(J) \subseteq h^{-l}(I)$ y $f^i(J) \cap f^j(J) = \emptyset$ si $i \neq j$.
Para cada $m \in \mathbb{N}$ se define $\psi : \{0,1\}^m \to Difeo^1([0,1])$ como

$$\psi(\alpha_1, ..., \alpha_m) = h^m f^{\alpha_m} h^{-m} ... h^2 f^{\alpha_2} h^{-2} h f^{\alpha_1} h^{-1} \qquad (\mathbf{D})$$

Como se tiene que $h^i f h^{-i} = f^{n^i}$, concluimos que $\psi(\alpha_1, ..., \alpha_m) = f^\beta$, con $\beta = \alpha_1 n + ... + \alpha_m n^m$.
Por lo tanto, $\psi(\alpha_1, ..., \alpha_m)(J) \subseteq h^{-l}(I)$ para todo $(\alpha_i)_{i=1}^m \in \{0,1\}^m$ y $\psi(\alpha_1, ..., \alpha_m)(J) \cap \psi(\alpha'_1, ..., \alpha'_m)(J) = \emptyset$ para todos $(\alpha_i)_{i=1}^m \neq (\alpha'_i)_{i=1}^m$.
Para llegar a una contradicción probaremos que $\psi(\alpha_1, ..., \alpha_m)(J)$ tiene longitud mayor que $(3/4)^m long(J)$ para todo $(\alpha_i) \in \{0,1\}^m$.
Operando en $(\mathbf{D})$ se observa lo siguiente: dados $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \{0,1\}$ existen $l_1, ..., l_r \in \mathbb{N}$ tales que $\psi(\alpha_1, ..., \alpha_m) = h^k f h^{-l_r} ... f h^{-l_1}$, con $k = l_1 + ... + l_r$. Aplicando la regla de la cadena podemos deducir que si $u \in J$ entonces $(\psi(\alpha_1, ..., \alpha_m))'(u) = \prod_{i=1}^{r} f'(x_i) \prod_{j=1}^{k} \frac{h'(y_j)}{h'(w_j)}$, donde $x_i \in h^{-l_1-...-l_i-l}(I)$, $y_j, w_j \in h^{-j-l}(I)$.
Utilizando el teorema del valor medio y las propiedades $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ probadas arriba, concluimos que $long(\psi(\alpha_1, ..., \alpha_m)(J)) \geq long(J)(1-\varepsilon)^{r+k} \geq long(J)(1-\varepsilon)^{2m} \geq long(J)(3/4)^m$ (en la segunda desigualdad usamos el hecho de que $r \leq k \leq m$).
Tenemos entonces para todo $m \in \mathbb{N}$: $long(\bigcup_{(\alpha_i)\in\{0,1\}^m} \psi(\alpha_1, ..., \alpha_m)(J)) \geq 2^m (3/4)^m long(J) > 1$ si $m$ es suficientemente grande, llegando a una contradicción. •

## 3.2. Acciones en $S^1$

El último teorema de la sección anterior caracteriza las representaciones fieles de $BS(1,n)$ en $Difeo^1_+([0,1])$. Haremos lo mismo ahora con $S^1$ en lugar de $[0,1]$.

**Proposición 3.6** *Sean $f, h \in Homeo_+(S^1)$ tales que $hfh^{-1} = f^n$. Entonces $f$ tiene puntos periódicos con período un divisor de $n-1$.*

*Demostración:* Utilizando las propiedades del número de rotación (sección 1.2) se tiene que $\rho(f) = n\rho(f)$ $(mod\ \mathbb{Z})$. Por lo tanto, $\rho(f) = \frac{s}{n-1}$ para algún $s \in \mathbb{N}$. De esto concluimos que $f^{n-1}$ tiene algún punto fijo. •

**Proposición 3.7** *Sea $\phi : BS(1,n) \to Difeo^1_+(S^1)$ una representación fiel. Entonces:*
*(1) $\phi(a)$ tiene puntos periódicos,*
*(2) $\phi(a)$ y $\phi(b)$ tienen algún punto periódico común.*

*Demostración:* Llamaremos $h = \phi(a)$, $f = \phi(b)$.
Recordemos que $Per(f)$ es un conjunto invariante por $h$ (lema 3.2). El lema previo nos dice que $Per(f) = Fix(f^{n-1}) \neq \emptyset$.
(1) Supondremos por absurdo que $h$ no tiene puntos periódicos y por ende $\rho(h) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
Si $h$ es conjugado a una rotación irracional entonces $Per(f)$ debe ser todo $S^1$, lo que significaría que $f^{n-1} = Id$, contradiciendo la fidelidad de la acción.
Si $h$ tiene como minimal a un Cantor $K$, entonces $K \subseteq Per(f)$ (todo conjunto compacto invariante contiene un minimal y, por el teorema 2.1, $K$ es el único minimal por $h$). Tomando $I$ una componente conexa de $Per(f)^c$ resulta que $I$ es un intervalo errante por $h$ cuyos extremos son fijos por $f^{n-1}$. El grupo $< h, f^{n-1} > \subseteq Dif^1_+(S^1)$ es isomorfo a $BS(1,n)$, podemos entonces utilizar los mismos argumentos que en el teorema 3.5 y llegar a una contradicción.

(2) Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\rho(h^m) = 0$. Tomemos $q \in Fix(f^{n-1}) = Per(f)$, entonces $\{h^{lm}(q) : l \in \mathbb{N}\} \subseteq Per(f)$. Sea $u$ un punto de acumulación de $\{h^{lm}(q) : \ l \in \mathbb{N}\}$. Por un lado, $u \in Fix(f^{n-1})$, ya que este es un conjunto cerrado. Por otro lado, $u \in \Omega(h^m) = Fix(h^m)$ (por el teorema 1.5). •

Dada entonces una acción fiel $\phi : BS(1,n) \to Difeo^1_+(S^1)$ existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $Fix(\phi(a)^m) \cap Fix(\phi(b)^{n-1}) \neq \emptyset$. Tomemos $p$ en dicha intersección, la acción de $< a^m, b^{n-1} >$ (de índice finito en $BS(1,n)$, como se verá en la proposición 4.5) tiene a $p$ como punto fijo global, podemos por lo tanto pensar su acción en $[0,1]$. Ya hemos visto que el grupo $\Gamma =< a^m, b^{n-1} >$ es isomorfo a $BS(1,n^m)$ por lo tanto el teorema 3.5 nos dice que la acción de $\Gamma$ es semiconjugada a la estándar. Hemos entonces deducido:

**Teorema 3.8** *Dada una acción fiel de $BS(1,n)$ en $Difeo^1_+(S^1)$, la acción restringida al subgrupo de índice finito $< a^m, b^{n-1} >$ tiene un punto fijo global y es semiconjugada a la acción estándar.*

En particular obtenemos que cualquier acción fiel de $BS(1,n)$ en $Difeo^1_+(S^1)$ tiene una órbita finita.

# Capítulo 4

# El grupo $\Gamma_{n,k}$

Llamaremos $\Gamma_{n,k}$ ($n, k \in \mathbb{Z}^+$) al grupo cuya presentación es
$< a, b_1, ..., b_n / \ ab_ia^{-1} = b_i^k, \ b_ib_j = b_jb_i >$.
Cuando $n = 1$ el grupo $\Gamma_{n,k}$ no es otro que $BS(1, k)$.
Las acciones del grupo $\Gamma_{n,k}$ sobre $S^n$ son estudiadas en [1].

## 4.1. Acciones en $\mathbb{R}$ y en $[0, 1]$

Dado un conjunto $L = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$ definimos $\eta_L : \{a, b_1, ..., b_n\} \to \text{Af}(\mathbb{R})$ por: $\eta_L(a) = M_k$, $\eta_L(b_i) = T_{\alpha_i}$.
Es fácil verificar que el mapa $\eta_L$ se extiende a un morfismo de grupos $\eta_L : \Gamma_{n,k} \to$Aff($\mathbb{R}$). Este morfismo es inyectivo: si $g \in \Gamma_{n,k}$ entonces $g = a^pb_1^{t_1}...b_n^{t_n}a^f$ (ver la proposición 5.1 para una demostración), por lo tanto $\eta_L(g)(x) = k^{p+f}x + k^p(t_1\alpha_1 + ... + t_n\alpha_n)$; por lo que $g \in Ker(\eta_L)$ sii $p + f = 0$ y $t_1 = ... = t_n = 0$ (porque $L$ es l.i.). A estas acciones las llamaremos estándar.

**Observación:** Utilizando que el mapa $\eta_L$ es un isomorfismo sobre su imagen podemos ver lo siguiente: si $g \in< b_1, ..., b_n >$ no es el neutro entonces $< a, g >$ es isomorfo a $BS(1, k)$.
Para mostrar esto basta ver que si $g \in< b_1, ..., b_n >$ es un elemento no trivial entonces $\eta_L(g) = T_c$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por lo tanto $< a, g >\cong< \eta_L(a), \eta_L(g) >=< M_k, T_c >$, conjugando por $M_c^{-1}$ esto último resulta $< M_k, T_1 >$, que es isomorfo a $BS(1, k)$ como ya vimos en la proposición 3.1.

**Proposición 4.1** *Sean $L$ y $T$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, ambos con $n$ elementos y linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.*
*Las acciones $\eta_L$ y $\eta_T$ son semiconjugadas si y sólo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $L = cT$.*

*Demostración:*
($\Leftarrow$) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = cx$ conjuga ambas acciones.
($\Rightarrow$) Sean $L = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ y $T = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente sobreyectiva tal que $\varphi\eta_L(g) = \eta_T(g)\varphi$ para todo $g \in \Gamma_{n,k}$. Observemos que $\varphi(0) = \varphi M_k(0) = \varphi\eta_L(a)(0) = \eta_T(a)\varphi(0) = M_k(\varphi(0))$, por lo que $\varphi(0) = 0$.
Por absurdo, supongamos que $\alpha_i/\beta_i$ no es igual para todo $i$; sin pérdida de generalidad podemos pensar $\alpha_1/\beta_1 \neq \alpha_2/\beta_2$. Conjugando $\eta_L$ por $M_{\alpha_2}^{-1}$ y $\eta_T$ por $M_{\beta_2}^{-1}$ podemos suponer

$\alpha_2 = \beta_2 = 1$.
Si $\alpha_1 < \beta_1$ existe $p/q \in \mathbb{Q} \cap (\alpha_1, \beta_1)$, $q > 0$. Obtenemos entonces $q\alpha_1 - p < 0 < q\beta_1 - p$. Llamando $g = b_1^q b_2^{-p}$ llegamos a la siguiente contradicción: $-\infty = lim_{r\to+\infty}\varphi(r(q\alpha_1 - p)) = lim_{r\to+\infty}\varphi\eta_L(g^r)(0) = lim_{r\to+\infty}\eta_T(g^r)\varphi(0) = lim_{r\to+\infty}r(q\beta_1 - p) = +\infty$. •

**Lema 4.2** *(a) Si $f, g \in Homeo_+(\mathbb{R})$ y $\phi$ es una semiconjugación de $< f, g >$ en $< T_\alpha, M_s >$ entonces $M_{\frac{\beta}{\alpha}}\phi$ semiconjuga $< f, g >$ en $< T_\beta, M_s >$.*
*(b) Sea $H$ un subgrupo de $Homeo_+(\mathbb{R})$ y $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que semiconjuga $H$ con un grupo de traslaciones. Entonces $T_c\psi$ también semiconjuga $H$ con el mismo grupo de traslaciones.*

*Demostración:*
(a) Si $\phi f = T_\alpha\phi$ entonces para todo $x \in \mathbb{R}$:
$M_{\frac{\beta}{\alpha}}\phi f(x) = \frac{\beta}{\alpha}T_\alpha\phi(x) = \frac{\beta}{\alpha}(\phi(x) + \alpha) = \frac{\beta}{\alpha}\phi(x) + \beta = T_\beta(M_{\frac{\beta}{\alpha}}\phi(x))$.
Si $\phi g = M_s\phi$ entonces $M_{\frac{\beta}{\alpha}}\phi g = M_{\frac{\beta}{\alpha}}M_s\phi = M_sM_{\frac{\beta}{\alpha}}\phi$.
(b) Si $g \in H$ entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\psi g = T_k\psi$. Entonces: $T_c\psi g = T_cT_k\psi = T_kT_c\psi$. •

**Teorema 4.3** *Toda acción fiel por difeomorfismos $C^1$ preservando orientación de $\Gamma_{n,k}$ en $[0, 1]$ es semiconjugada a una de las acciones estándar.*

*Demostración:*
Siempre supondremos $n > 1$. Sea $\gamma : \Gamma_{n,k} \to Difeo^1_+([0, 1])$ morfismo inyectivo.
Dado $g \in< b_1, ..., b_n >\subseteq \Gamma_{n,k}$ ya observamos que $< g, a >$ es isomorfo a $BS(1, k)$. Por lo tanto, el teorema 3.5 nos dice que esta acción restringida a $< g, a >$ es semiconjugada a la acción dada por identificar $g$ con $T_1$ y $a$ con $M_k$. Es decir existe $\phi_g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ creciente sobreyectiva tal que $\phi_g\gamma(g) = T_1\phi_g$ y $\phi_g\gamma(a) = M_k\phi_g$.

En particular podemos deducir que $\forall g \in< b_1, ..., b_n >$, $g$ no tiene puntos fijos en $(0, 1)$. Entonces concluimos del teorema de Hölder (2.10) que la acción $\gamma$ restringida a $< b_1, ..., b_n >$ es semiconjugada a una acción por traslaciones en $\mathbb{R}$, o sea que existen $\psi : (0, 1) \to \mathbb{R}$ creciente sobreyectiva y $\{\alpha_g : g \in< b_1, ..., b_n >\}$ un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ de forma que $\psi\gamma(g) = T_{\alpha_g}\psi$ para todo $g \in< b_1, ..., b_n >$.

Usando la parte (a) del lema previo podemos cambiar cada $\phi_g$ por $\varphi_g = M_{\alpha_g}\phi_g$ y obtenemos para cada $g \in< b_1, ..., b_n >$ una función sobreyectiva creciente $\varphi_g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ que verifica $\varphi_g\gamma(g) = T_{\alpha_g}\varphi_g$ y $\varphi_g\gamma(a) = M_k\varphi_g$.
Vale observar que por el hecho de ser $\gamma(a)$ semiconjugada a $M_k$ se tiene que el conjunto $Fix(\gamma(a)) \cap (0, 1)$ es no vacío (está incluido en la preimagen de 0 por la semiconjugación e incluye a los extremos de dicha preimagen). Además, cualquier mapa $\tau : (0, 1) \to \mathbb{R}$ tal que $\tau\gamma(a) = M_k\tau$ verifica $\tau(Fix(\gamma(a)) \cap (0, 1)) = \{0\}$.
Por lo tanto, tomando $z \in Fix(\gamma(a))$, $z \neq 0, 1$, tendremos que $\varphi_g(z) = 0$ para todo $g \in< b_1, ..., b_n >$. Utilizando (b) del lema previo podemos también suponer que $\psi(z) = 0$ (recordar que $\psi$ es una semiconjugación con un grupo de traslaciones).

El grupo $\{\alpha_g : g \in< b_1, ..., b_n >\}$ es denso en $\mathbb{R}$ por ser no cíclico (es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$). Existe por lo tanto una sucesión $\{g_i : i \in \mathbb{N}\}$ de forma que $\alpha_{g_i} \longrightarrow 0^+$. Probaremos que $\varphi_{g_i} \rightrightarrows \psi$.

Primero notemos que $(\psi - \varphi_g)\gamma(g)(x) = T_{\alpha_g}\psi(x) - T_{\alpha_g}\varphi_g(x) = (\psi - \varphi_g)(x)$ para todos $x \in \mathbb{R}$ y $g \in < b_1, ..., b_n >$.
Dado $\varepsilon > 0$ sea $i_0$ tal que para todo $i > i_0$ $\alpha_{g_i} < \varepsilon$. Sean $x \in \mathbb{R}$, $i > i_0$. Como $\gamma(g_i)$ no tiene puntos fijos existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in [\gamma(g_i^s)(z), \gamma(g_i^{s+1})(z))$. Utilizando que $\varphi_{g_i}$ y $\psi$ son crecientes y que $\psi(\gamma(g_i^s)(z)) = \varphi_{g_i}(\gamma(g_i^s)(z)) = s\alpha_{g_i}$ deducimos que $\psi(x), \varphi_{g_i}(x) \in [s\alpha_{g_i}, (s+1)\alpha_{g_i}]$ y por lo tanto $|\psi(x) - \varphi_{g_i}(x)| < \alpha_{g_i} < \varepsilon$.

Podemos ahora probar que $\psi$ semiconjuga la acción de $\gamma$ a la acción estándar dada por $\{\alpha_{b_1}, ..., \alpha_{b_n}\}$:
* $\psi\gamma(b_j) = T_{\alpha_{b_j}}\psi$ para $j = 1, ..., n$ ya lo sabíamos;
* $\psi\gamma(a) = lim_{i\to+\infty}\varphi_{g_i}\gamma(a) = lim_{i\to+\infty}M_k\varphi_{g_i} = M_k\psi$. •

## 4.2. Acciones en $S^1$

**Proposición 4.4** *Sea $\{f_1, ..., f_s\} \subseteq Homeo_+(S^1)$ tal que $f_i f_j = f_j f_i$ para todos $i, j$. Si $f_1, ..., f_s$ tienen puntos fijos entonces existe al menos un punto fijo común.*

*Demostración:*
Se demuestra por inducción en $s$. Si $s = 1$ no se debe probar nada.
Supongamos que $f_1, ..., f_{s-1}$ tienen punto fijo común $p$. Por conmutar $f_s$ con todos los $f_i$ se obtiene para todo $n \in \mathbb{N}$: $f_i f_s^n(p) = f_s^n f_i(p) = f_s^n(p)$; por lo tanto $f_s^n(p)$ también es fijo para todos los $f_i$. Tomamos $q$ punto de acumulación de $\{f_s^n(p) : n \in \mathbb{N}\}$ y concluimos que $q \in Fix(f_s)$ (porque $f_s$ tiene punto fijo y por lo tanto el $\omega$-límite de $p$ es un punto fijo) y $q$ es fijo por $f_i$ para todo $i < s$ (porque es acumulado por puntos fijos de $f_i$).

Una demostración más general puede hacerse utilizando el teorema de Margulis (2.11). Mostraremos que cualquier acción en $S^1$ de un grupo sin subgrupo libre a dos generadores tiene un punto fijo global si todos sus generadores tienen punto fijo. En nuestro caso, el grupo $< f_1, ..., f_s >$ es abeliano y por ende no contiene un subgrupo libre a dos generadores.
Si $\Gamma \subseteq Homeo_+(S^1)$ no tiene un subgrupo libre a dos generadores entonces existe una medida $\mu$ en $S^1$ invariante por la acción de $\Gamma$. Puede mostrarse (como en la sección 2.2) que si $f \in \Gamma$ tiene algún punto fijo entonces $sop(\mu) \subseteq Fix(f)$. Si suponemos que todo $g \in A$ tiene punto fijo, con $A$ un conjunto generador de $\Gamma$, concluimos que el soporte de $\mu$ debe estar incluido en $\bigcap_{g\in A} Fix(g)$, de lo que se deduce que este conjunto no es vacío. •

**Proposición 4.5** *El grupo generado por $\{b_1^{k-1}, ..., b_n^{k-1}, a^u\}$ es normal y de índice finito en $\Gamma_{n,k}$ para todo $u \in \mathbb{Z}^+$.*

*Demostración:*
Veamos primero que $H = < b_1^{k-1}, ..., b_n^{k-1}, a^u >$ es normal.
Para ello observemos lo siguiente: al utilizar $r$ veces la relación $ab_i a^{-1} = b_i^k$ obtenemos $a^r b_i a^{-r} = b_i^{k^r}$, por lo que $b_i = a^{-r} b_i^{k^r} a^r = (a^{-r} b_i a^r)^{k^r}$ para cualquier $r \in \mathbb{Z}^+$.
Al conjugar $b_i^{k-1}$ por $a$ caemos en $H$: $ab_i^{k-1}a^{-1} = (ab_i a^{-1})^{k-1} = b_i^{k(k-1)} \in H$.
Conjugamos $b_i^{k-1}$ por $a^{-1}$: utilizando lo observado al comienzo de la prueba con $r = u - 1$ tenemos que $a^{-1} b_i^{k-1} a = (a^{-1} b_i a)^{k-1} = (a^{-u} b_i^{k^{u-1}} a^u)^{k-1} = (a^{-u} b_i^{k-1} a^u)^{k^{u-1}} \in H$.

Si conjugamos $a^u$ por $b_i$ tenemos: $b_i a^u b_i^{-1} = b_i a^u b_i^{-1} a^{-u} a^u = b_i b_i^{-k^u} a^u = b_i^{-k^u+1} a^u \in H$ porque $k^u - 1 = 0$ $(mod\ k-1)$.
Finalmente, al conjugar $a^u$ por $b_i^{-1}$ se tiene: $b_i^{-1} a^u b_i = b_i^{-1} a^u b_i a^{-u} a^u = b_i^{k^u-1} a^u \in H$.

Mostremos ahora que $H$ tiene índice finito. Por ser $H$ normal las clases a izquierda y a derecha coinciden.
Sea $g \in \Gamma_{n,k}$, entonces $g = a^p b_1^{t_1} ... b_n^{t_n} a^f$, como veremos en la proposición 5.1. Podemos multiplicar a izquierda por $a^{su}$ con $s$ grande (si es necesario) para que $su + p \geq 0$, obteniendo de esa manera $g = a^r b_1^{t_1} ... b_n^{t_n} a^f$ $(mod\ H)$ con $r \geq 0$. Operando se obtiene: $a^r b_1^{t_1} ... b_n^{t_n} a^f = a^r b_1^{t_1} ... b_n^{t_n} a^{-r} a^{f+r} = b_1^{k^r t_1} ... b_n^{k^r t_n} a^{f+r}$; con lo que concluimos que $g = b_1^{s_1} ... b_n^{s_n} a^d$ $(mod\ H)$, para ciertos $s_1, ..., s_n, d \in \mathbb{Z}$. Realizando la división entera de los $s_i$ por $k-1$ y de $d$ por $u$ se llega a (recordando que los $b_i$ conmutan) $g = b_1^{q_1(k-1)} ... b_n^{q_n(k-1)} b_1^{r_1} ... b_n^{r_n} a^j a^{qu} = b_1^{r_1} ... b_n^{r_n} a^j$ $(mod\ H)$.
Llegamos a la conclusión de que dado $g \in \Gamma_{n,k}$ existen $r_1, ..., r_n \in \{0, ..., k-2\}$, $j \in \{0, ..., u-1\}$ tales que $g = b_1^{r_1} ... b_n^{r_n} a^j$ $(mod\ H)$. Por lo tanto $|G/H| \leq u(k-1)^n$.•

**Observación:** Tomando $n = 1$, podemos concluir que en $BS(1,k)$ el grupo generado por $a^u$ y $b^{k-1}$ es normal y de índice finito para todo $u \in \mathbb{Z}^+$.

Podemos entonces concluir el siguiente teorema:

**Teorema 4.6** *Sea $\phi : \Gamma_{n,k} \to Difeo_+(S^1)$ una representación fiel. Entonces existe un subgrupo $H$ de índice finito tal que la acción de $\phi$ restringida a $H$ tiene punto fijo global. Además, $\phi$ restringida a $H$ es semiconjugada a una de las acciones estándar.*

*Demostración:* Llamamos $g = \phi(a)$, $f_i = \phi(a_i)$.
En $\Gamma_{n,k}$ tenemos las siguientes relaciones: $ab_i a^{-1} = b_i^k$, por lo tanto para el número de rotación de $f_i$ se tiene $\rho(f_i) = k\rho(f_i)$ $(mod\ \mathbb{Z})$, es decir que $f_i^{k-1}$ tiene punto fijo para todo $i$. Usando la proposición 4.4 concluimos que $\cap Fix(f_i^{k-1})$ es un conjunto no vacío.
Usando el teorema 3.8 y que $< a, b_1 >$ es isomorfo a $BS(1,k)$ se concluye que existe $u \in \mathbb{Z}^+$ tal que $g^u$ tiene puntos fijos. Tomemos $x \in \cap Per(f_i)$. Entonces $g^s(x) \in \cap Per(f_i)$ para todo $s \in \mathbb{Z}$. Sea $z$ punto de acumulación de $\{g^s(x) : s \in \mathbb{Z}\}$. Se verifica que $z \in \cap Per(f_i)$ (porque $g^s(x) \in \cap Per(f_i)\ \forall s \in \mathbb{Z}$) y $z \in Per(g)$ (porque $z \in \omega(x)$).
Tenemos entonces que $H =< f_1^{k-1}, ..., f_n^{k-1}, g^u >$ fija el punto $z$. La acción $\phi$ restringida a $H$ puede por lo tanto verse como una acción en $Difeo_+^1([0,1])$. El grupo $H$ es isomorfo a $\Gamma_{n,k^u}$, por lo tanto el teorema 4.3 nos dice que la acción es semiconjugada a una de las estándar. •

# Capítulo 5

# Los grupos $\Gamma_A$

Dada una matriz $A = (m_{ij})$ de tamaño $n \times n$ con entradas enteras y determinante no nulo se define el grupo $\Gamma_A$ por la siguiente presentación:
$\Gamma_A =< a, b_1, ..., b_n / b_i b_j = b_j b_i, a b_i a^{-1} = b_1^{m_{1i}} ... b_n^{m_{ni}} >$.
Cuando la matriz $A$ es $kI_n$ (donde $I_n$ es la matriz identidad de tamaño $n \times n$) el grupo resultante es $\Gamma_{n,k}$.

Algunas acciones del grupo $\Gamma_A$ en variedades son estudiadas en [12], donde se prueba que cualquier acción de $\Gamma_A$ por difeomorfismos $C^1$-cerca de la identidad no es fiel si la matriz $A$ es hiperbólica.

Podemos ver al grupo como una extensión HNN de $\mathbb{Z}^n$ por el monomorfismo $\phi_A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ dado por la matriz $A$. O sea, $\phi_A : \mathbb{Z}^n \to \phi_A(\mathbb{Z}^n)$ es un isomorfismo, por lo que el teorema 1.1 nos da la existencia del grupo $\Gamma_A =< a, \mathbb{Z}^n / aza^{-1} = \phi_A(z)\ \forall z \in \mathbb{Z}^n >$ que contiene a $\mathbb{Z}^n$ como subgrupo. Además, como $\mathbb{Z}^n$ es libre de torsión también $\Gamma_A$ lo es.

**Ejemplo:** Si $A$ es la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ entonces el grupo $\Gamma_A$ tiene la presentación:
$< a, b_1, b_2 /\ b_1 b_2 = b_2 b_1,\ a b_1 a^{-1} = b_1^3 b_2^2,\ a b_2 a^{-1} = b_1^{-1} b_2^6 >$.
Observar que $\phi_A(1,2) = (1,14)$ y $a(b_1 b_2^2)a^{-1} = (ab_1a^{-1})(ab_2a^{-1})^2 = b_1^3 b_2^2 (b_1^{-1} b_2^6)^2 = b_1 b_2^{14}$; o sea que, como lo indica el hecho de ser una extensión HNN, conjugar por $a$ un elemento $z \in< b_1, b_2 >$ puede verse como multiplicar las coordenadas de $z$ por la matriz $A$.

**Proposición 5.1** *Cualquier elemento de $\Gamma_A$ es de la forma $a^r b_1^{s_1} ... b_n^{s_n} a^p$, con $s_i, r, p \in \mathbb{Z}$.*

*Demostración:*
Observar que si $q > 0$ entonces $a^q b_i = a^q b_i a^{-q} a^q = \phi_A^k(b_i) a^q$, o sea que si $h \in< b_1, ..., b_n >$ tenemos que $a^q h = \tilde{h} a^q$, con $\tilde{h} \in< b_1, ..., b_n >$.
Sea $g \in \Gamma_A$ un elemento cualquiera, entonces $g = a^{r_1} h_1 ... a^{r_l} h_l$, con $h \in< b_1, ..., b_n >$. Tomamos $y \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $y + r_1 + ... + r_j \geq 0$ para todo $j = 1, ..., l$. Escribimos $g = a^{-y} a^y a^{r_1} h_1 ... a^{r_l} h_l$, y utilizando lo comentado arriba se concluye que $g = a^{-y} \tilde{h}_1 a^{r_1+y} a^{r_2} h_2 ... a^{r_l} h_l = a^{-y} \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 a^{r_1+r_2+y} a^{r_3} h_3 ... a^{r_l} h_l = ... = a^{-y} \tilde{h}_1 ... \tilde{h}_l a^{y+r_1+...+r_l}$. Dada nuestra elección del $y$, puede verse que podemos pedir que $r, p$ cumplan: $r \leq 0 \leq p$. $\bullet$

**Observación:** En particular, esto vale para los grupos $\Gamma_{n,k}$ y $BS(1,n)$, algo que ya hemos utilizado.

La forma que nos da la proposición 5.1 de escribir los elementos de $\Gamma_A$ no es única. Veamos cómo puede ocurrir que un elemento se escriba de dos maneras distintas.
Si $a^r b_1^{s_1}...b_n^{s_n} a^p = a^l b_1^{t_1}...b_n^{t_n} a^q$ entonces $a^{r-l} b_1^{s_1}...b_n^{s_n} a^{p-q} = b_1^{t_1}...b_n^{t_n}$. Utilizando que $a < b_1, ..., b_n > a^{-1} \subseteq < b_1, ..., b_n >$ obtenemos $a^{r-l+p-q} \in < b_1, ..., b_n >$, los resultados 1.1 y 1.2 afirman que $\Gamma_A$ es libre de torsión y $< a > \cap < b_1, ..., b_n >= \{id\}$, por lo tanto $r - l = q - p$. Teniendo $a^{r-l} b_1^{s_1}...b_n^{s_n} a^{l-r} = b_1^{t_1}...b_n^{t_n}$ concluimos $\phi_A^{r-l}(b_1^{s_1}...b_n^{s_n}) = b_1^{t_1}...b_n^{t_n}$ o sea que $(t_1, ..., t_n)^T = A^{r-l}(s_1, ..., s_n)^T$.

Definimos $\mathcal{A} = \{a^{-k} b_1^{t_1}...b_n^{t_n} a^k : t_i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$. Observemos que $a^{-k} b_i a^k = a^{-k-r} \phi_A^r(b_i) a^{k+r}$ para todo $r \geq 0$; por lo tanto dados $k \geq q \geq 0$, $(a^{-q} b_1^{t_1}...b_n^{t_n} a^q)(a^{-k} b_1^{s_1}...b_n^{s_n} a^k) =$
$a^{-k} \phi_A^{k-q}(b_1^{t_1}...b_n^{t_n}) b_1^{s_1}...b_n^{s_n} a^k$, o sea que $\mathcal{A}$ es un subgrupo. Este subgrupo está generado por los elementos de la forma $\{a^{-k} b_i a^k : k \in \mathbb{N}\}$, por lo tanto es abeliano: es claro que $a^q b_i a^{-q}$ conmuta con $b_j$ para todo $q \in \mathbb{N}$ y para todos $i, j$; por lo tanto, conjugando por $a^h$ para algún $h \in \mathbb{Z}$ se ve que para todos $r, s \in \mathbb{Z}$ $a^r b_i a^{-r}$ conmuta con $a^s b_j a^{-s}$. El subgrupo $\mathcal{A}$ es normal en $\Gamma_A$; de hecho es el menor subgrupo normal que contiene a $\{b_1, ..., b_n\}$.

Con lo mostrado recién no es difícil ver que se tiene la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \Gamma_A \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde el primer mapa es la inclusión y el segundo es el que manda $a^p b_1^{s_1}...b_n^{s_n} a^r$ en $p + r$.

**Observación:** De la sucesión exacta de arriba deducimos que $[\Gamma_A, \Gamma_A] \subseteq \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\Gamma_A$ es metabeliano, en particular es soluble.

El teorema C en [2] da una caracterización de los $\Gamma_A$ vía esta sucesión: muestra que si un grupo $G$ es libre de torsión, finitamente presentado y contiene un subgrupo normal y abeliano $N$ tal que $G/N \simeq \mathbb{Z}$ entonces $G$ es isomorfo a algún $\Gamma_A$. Esta sucesión exacta hace que a estos grupos se los denote como "abelian by cyclic ".

**Proposición 5.2** *El subgrupo $\mathcal{A}$ es isomorfo un subgrupo de $\mathbb{Q}^n$.*

*Demostración:* Definimos $P : \mathcal{A} \to \mathbb{Q}^n$ por $P(a^j b_1^{t_1}...b_n^{t_n} a^{-j}) = A^j(t_1, ..., t_n)^T$. Este mapa está bien definido: si un elemento $g \in \mathcal{A}$ se escribe de dos formas distintas, o sea $g = a^{-r} b_1^{s_1}...b_n^{s_n} a^r = a^{-l} b_1^{t_1}...b_n^{t_n} a^l$, ya vimos que esto implica $(t_1, ..., t_n)^T = A^{l-r}(s_1, ..., s_n)^T$, por lo tanto $A^{-l}(t_1, ..., t_n)^T = A^{-l} A^{l-r}(s_1, ..., s_n)^T = A^{-r}(s_1, ..., s_n)^T$.
El mapa es un morfismo: dados $g_1, g_2 \in \mathcal{A}$, ya observamos que podemos elegir $j \in \mathbb{Z}$ tal que $g_1 = a^{-j} b_1^{t_1}...b_n^{t_n} a^j$, $g_2 = a^{-j} b_1^{s_1}...b_n^{s_n} a^j$, por tanto $P(g_1 g_2) = P(a^{-j} b_1^{t_1+s_1}...b_n^{t_n+s_n} a^j) = A^{-j}(t_1 + s_1, ..., t_n + s_n)^T = P(g_1) + P(g_2)$. Ver que $P$ es inyectivo es directo ya que $A$ es una matriz con determinante no nulo.•

Como ya dijimos anteriormente, tomando $A = kI_n$ el grupo $\Gamma_A$ resulta ser $\Gamma_{n,k}$, que se puede ver como un subgrupo del grupo afín (vía la acción estándar). Dada $A$ una matriz cualquiera, ¿existirá alguna manera de ver $\Gamma_A$ dentro de $Af(\mathbb{R})$? La siguiente proposición responde esta pregunta.

**Proposición 5.3** *Sea $A = (m_{ij}) \neq I_n$ una matriz $n \times n$.*
*(1) Supongamos que existe $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ vector propio de $A^T$ correspondiente al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ l.i. sobre $\mathbb{Q}$. Entonces existe un morfismo inyectivo $\psi : \Gamma_A \to Af(\mathbb{R})$ tal que $\psi(a) = M_\lambda$, $\psi(b_i) = T_{\alpha_i}$.*
*(2) Si no existe un vector propio de $A^T$ como en las hipótesis de (1) entonces no existe ningún morfismo inyectivo $\psi : \Gamma_A \to Af(\mathbb{R})$.*

*Demostración:*
Probemos primero (2). Supongamos que existe un morfismo inyectivo $\psi : \Gamma_A \to Af(\mathbb{R})$.

Como vimos, $[\Gamma_A, \Gamma_A] \subseteq \mathcal{A}$, por ser $A \neq I_n$ se verifica también que $[\Gamma_A, \Gamma_A] \neq \{1_{\Gamma_A}\}$.
Fijamos $g$ un elemento no trivial de $[\Gamma_A, \Gamma_A]$, entonces $\psi(g) \in \psi([\Gamma_A, \Gamma_A]) \subseteq [Af(\mathbb{R}), Af(\mathbb{R})] = \{T_\beta,\ \beta \in \mathbb{R}\}$, o sea que $\psi(g)$ es una traslación no trivial.
Los $b_i$ conmutan con $g$ (porque $g \in \mathcal{A}$) y en $Af(\mathbb{R})$ los únicos elementos que conmutan con una traslación no trivial dada son las traslaciones, por lo tanto existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $\psi(b_i) = T_{\alpha_i}$. El conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es l.i. porque $\psi$ es inyectiva.

Sean $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\psi(a) = T_\beta M_\lambda$.
Se verifica para todo $i = 1, ..., n$: $T_{\lambda\alpha_i} = \psi(a)\psi(b_i)\psi(a)^{-1} = \psi(ab_ia^{-1}) = \psi(b_1^{m_{1i}}...b_n^{m_{ni}}) = T_{m_{1i}\alpha_1 + ... + m_{ni}\alpha_n}$, o sea que $\lambda\alpha_i = m_{1i}\alpha_1 + ... + m_{ni}\alpha_n$. Esto significa que $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ es vector propio de $A^T$ con valor propio $\lambda$, lo que muestra el contrarrecíproco de (2).

Veamos (1) ahora. El argumento final en la prueba de (2), sumado a que las traslaciones conmutan, muestra que existe un morfismo $\psi$ tal que $\psi(a) = M_\lambda$, $\psi(b_i) = T_{\alpha_i}$.
Resta mostrar la inyectividad. Por la proposición 5.1 todo elemento de $\Gamma_A$ se puede escribir como $a^r b_1^{s_1} ... b_n^{s_n} a^q$. Por definición: $\psi(a^r b_1^{s_1} ... b_n^{s_n} a^q) = M_\lambda^r T_{\alpha_1}^{s_1} ... T_{\alpha_n}^{s_n} M_\lambda^q = T_{\lambda^r(s_1\alpha_1 + ... + s_n\alpha_n)} M_{\lambda^{q+r}}$, para que esto sea la identidad debe ocurrir $q = -r$ y $s_1 = ... = s_n = 0$, o sea que el elemento inicial era el neutro. •

**Ejemplos:**
(1) En el caso de $\Gamma_{n,k}$, con $k \neq 1$ estamos en las hipótesis de (1) en la proposición. En este caso, los morfismos que nos da la tesis no son otros que las acciones estándar.
(2) Sea la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tiene el valor propio $2 + \sqrt{2}$, con vector propio asociado $(1 + \sqrt{2}, 1)$. Por lo tanto $\Gamma_A$ puede incluirse en $Af(\mathbb{R})$, identificando $a$ con $M_{2+\sqrt{2}}$, $b_1$ con $T_{1+\sqrt{2}}$ y $b_2$ con $T_1$.

## 5.1. Acciones sobre $\mathbb{R}$ y $S^1$

Se tiene que $\Gamma_A =< a > \mathcal{A}$ (todos los elementos de $\Gamma_A$ son de la forma $a^p b_1^{s_1} ... b_n^{s_n} a^r = a^{p+r}(a^{-r} b_1^{s_1} ... b_n^{s_n} a^r)$). La observación posterior al corolario 2.6 nos permite construir una acción fiel de $\Gamma_A$ en $\mathbb{R}$; es más, utilizando las mismas ideas que aparecen en el ejemplo posterior al teorema 3.4 podemos obtener una representación $\varphi : \Gamma_A \to Difeo_+^\infty(\mathbb{R})$, para esto último basta recordar que (por la proposición 5.2) $\mathcal{A}$ puede verse como subgrupo de $\mathbb{Q}^n$, que puede pensarse como subgrupo de $\mathbb{R}$ (tomando un $\mathbb{Q}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}$ de dimensión $n$).

Esta acción viene de un orden para el cual $\mathcal{A}$ es convexo dentro de $G$, o sea: si $1 \preceq h \preceq k$, $k \in \mathcal{A}$ entonces $h \in \mathcal{A}$. La pregunta que surge es: ¿todos los órdenes en $\Gamma_A$ hacen de $\mathcal{A}$ un subgrupo convexo? La pregunta puede ser reformulada como: ¿toda acción fiel sin punto fijo global de $\Gamma_A$ en $\mathbb{R}$ tiene un intervalo invariante por $\mathcal{A}$ y errante por $a$? Mostremos a continuación que ambas preguntas son equivalentes.

Supongamos que todas las acciones fieles sin punto fijo global tienen un intervalo invariante por $\mathcal{A}$ y errante por $a$. Sea $\preceq$ un orden sobre $\Gamma_A$. Tomemos $\phi$ la acción dinámica correspondiente a este orden (ver la demostración de (2) en el teorema 2.3). Por hipótesis existe un intervalo $I = (\alpha, \beta)$ invariante por $\phi(\mathcal{A})$ y errante por $\phi(a)$. Dados $h \in \mathcal{A}$, $r \in \mathbb{Z}$ por ser $\mathcal{A}$ normal existe $\bar{h} \in \mathcal{A}$ tal que $\phi(h)(\phi(a^r)(I)) = \phi(a^r)(\phi(\bar{h})(I)) = \phi(a^r)(I)$, o sea que $\phi(a^r)(I)$ es también invariante por $\phi(\mathcal{A})$. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $t(1) \in [\phi(a^m)(\alpha), \phi(a^{m+1})(\alpha))$. Entonces para todo $r \in \mathbb{Z}$, $t(a^r h) = \phi(a^r h)(t(1)) \in [\phi(a^{m+r})(\alpha), \phi(a^{m+r+1})(\alpha))$. Por otro lado, si $k \in \mathcal{A}$ entonces $t(k) = \phi(k)(t(1)) \in [\phi(a^m)(\alpha), \phi(a^{m+1})(\alpha))$, al igual que $t(1)$. Esto significa que si $r \neq 0$, $h, k \in \mathcal{A}$ entonces $t(a^r h) \notin (t(1), t(k))$. Por lo tanto, si $g = a^r h \in \Gamma_A$ verifica $1 \prec g \prec k$, necesariamente $r = 0$, o sea $g \in \mathcal{A}$; esta es la definición de subgrupo convexo.

Supongamos ahora que todos los órdenes definidos sobre $\Gamma_A$ hacen de $\mathcal{A}$ un subgrupo convexo, a partir de esto probemos que todas las acciones sobre $\Gamma_A$ tienen un intervalo invariante por $\mathcal{A}$ y errante por $a$.
Sea $\varphi : \Gamma_A \to Homeo_+(\mathbb{R})$ una representación fiel sin punto fijo global.
Mostramos primero que la órbita de 0 por $\mathcal{A}$ está acotada. Tomamos una sucesión densa en $\mathbb{R}$ cuyo primer término es 0 y consideramos el orden $\preceq$ definido en $\Gamma_A$ por dicha sucesión (ver la demostración de (1) en el teorema 2.3). Si la órbita de 0 no está acotada entonces el subgrupo $\mathcal{A}$ no resulta convexo: tomamos $g \in \Gamma_A \setminus \mathcal{A}$ tal que $\varphi(g)(0) > 0$ (existe porque 0 no es fijo por $\Gamma_A$), si existe $h \in \mathcal{A}$ con $\varphi(h)(0) > \varphi(g)(0)$ entonces $1 \prec g \prec h$.
Tomemos ahora $\alpha, \beta$ el ínfimo y el supremo de $\{\varphi(g)(0) : g \in \mathcal{A}\}$. Veamos que $\varphi(h)(\alpha) = \alpha$ para todo $h \in \mathcal{A}$: si $\varphi(h)(\alpha) \neq \alpha$ podemos suponer que $\varphi(h)(\alpha) > \alpha$ (en caso contrario, cambiamos $h$ por $h^{-1}$), tomamos $g \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(g)(0) < \varphi(h)(\alpha)$, por lo que $\varphi(h^{-1}g)(0) < \alpha$, que contradice la definición de $\alpha$; de igual manera puede probarse que $\varphi(h)(\beta) = \beta$, o sea que $I = (\alpha, \beta)$ es invariante por $\mathcal{A}$. Supongamos por absurdo que $I$ no es errante para $\varphi(a)$. Entonces $\varphi(a)(\alpha) \in (\alpha, \beta)$ (o esto ocurre con $\varphi(a)(\beta)$); por continuidad de $\varphi(a)$ existe $c \in (\alpha, \varphi(a)(\alpha))$ tal que $\varphi(a)(c) < \beta$. Por definición de ínfimo y supremo obtenemos $h_1, h_2 \in \mathcal{A}$ tales que $\varphi(h_1)(0) < c$, $\varphi(a)(c) < \varphi(h_2)(0)$; por lo que $\varphi(h_2 h_1^{-1})(c) > \varphi(h_2)(0) > \varphi(a)(c) > c$. Tomando entonces un orden $\preceq$ determinado por una sucesión cuyo primer término sea $c$ obtenemos $1 \prec a \prec h_2 h_1^{-1}$, lo que contradice que $\mathcal{A}$ sea convexo en $\Gamma_A$.

Para $\Gamma_{n,k}$ ya vimos que la respuesta a estas preguntas es negativa, gracias a la existencia de las acciones estándar, para las cuales no hay intervalos invariantes por $\mathcal{A}$ (en ese caso $\mathcal{A}$ es un grupo de traslaciones). Lo mismo vale cuando la matriz $A$ cumple las hipótesis de (1) en la proposición 5.3.

Veamos algunas propiedades de las acciones de $\Gamma_A$.

**Proposición 5.4** *Sea $\varphi : \Gamma_A \to Homeo_+(S^1)$ una representación fiel con $A - Id$ invertible.*

*Entonces:*
*(1) existe un punto que es periódico para todos los $\varphi(b_i)$,*
*(2) el conjunto $\cap Per(\varphi(b_i))$ es invariante por la acción de $\Gamma_A$.*

*Demostración:* Llamemos $g = \varphi(a)$, $f_i = \varphi(b_i)$.
(1) Por la definición del grupo, tenemos las relaciones:
$gf_1g^{-1} = f_1^{m_{11}}...f_n^{m_{n1}}$, ..., $gf_ng^{-1} = f_1^{m_{1n}}...f_n^{m_{nn}}$. Llamemos $\alpha_i$ al número de rotación de $f_i$. Entonces se deduce que $\alpha_i = m_{1i}\alpha_1 + ... + m_{ni}\alpha_n$ $(mod\ \mathbb{Z})$ para $i = 1, ..., n$ (al conmutar los $f_i$ tenemos que el número de rotación de la composición es la suma de los números de rotación). Matricialmente podemos escibirlo: $A^T((\alpha_i)) = (\alpha_i)$ $(mod\ \mathbb{Z}^n)$. Esto implica que $(A^T - Id)(\alpha_i) \in \mathbb{Z}^n$, o sea, $(\alpha_i) \in (A^T - Id)^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subseteq \mathbb{Q}^n$; concluyéndose que $f_i$ tiene puntos periódicos para todo $i$. Como los $f_i$ conmutan la proposición 4.4 nos dice que existe un punto que es periódico para todos los $f_i$.

(2) Sea $k$ un múltiplo común a todos los períodos de los $f_i$.
Mostremos primero que $g^{-1}(\cap Per(f_i)) \subseteq \cap Per(f_i)$. Si $x \in \cap Per(f_i)$ entonces $f_j^k g^{-1}(x) = g^{-1}f_1^{km_{1j}}...f_n^{km_{nj}}(x) = g^{-1}(x)$.
Ahora, si $x \in \cap Per(f_i)$ entonces $g(x) = gf_j^k(x) = (f_1^{m_{1j}}...f_n^{m_{nj}})^k g(x)$. Por lo tanto $g(x)$ es periódico para $f_1^{m_{1j}}...f_n^{m_{nj}}$ para cada $j$. Como la matriz $A$ es invertible, tenemos que existen $h, c_1, ..., c_n \in \mathbb{Z}$ tales que $c_1(m_{11}, ..., m_{n1}) + ... + c_n(m_{n1}, ..., m_{nn}) = he_1$; por lo que $f_1^{kh}g(x) = (f_1^{m_{11}}...f_n^{m_{n1}})^{kc_1}...(f_1^{m_{1n}}...f_n^{m_{nn}})^{kc_n}g(x) = g(x)$. Así hemos mostrado que $g(x) \in Per(f_1)$, de igual manera se prueba que $g(x) \in Per(f_j)$ para todo $j = 1, ..., n$.
Ver que $\cap Per(f_i)$ es invariante por $< f_1, ..., f_n >$ es sencillo: si $x \in \cap Per(f_i)$ entonces $f_j^k(f_s(x)) = f_s(f_j^k(x)) = f_s(x)$, por lo que $f_s(x) \in \cap Per(f_i)$ para todo $s = 1, ..., n$; para $f_s^{-1}(x)$ la prueba es análoga. •

**Observaciones:**
Siempre supondremos que las acciones que aparecen son fieles y $A$ no tiene valor propio 1, lo que nos permitirá utilizar la proposición 5.4. Seguiremos la notación de la demostración de dicha proposición.

(1) El hecho de que $\cap Per(f_i)$ sea un conjunto no vacío invariante hace que la acción no pueda tener a $S^1$ como minimal invariante, porque de ocurrir esto los $f_i$ serían periódicos, contradiciendo la fidelidad de la representación.
Esto puede probarse de otra manera utilizando la proposición 2.14, ya que $\Gamma_A$ no contiene un grupo libre a dos generadores (porque, como observamos al comienzo del capítulo, $\Gamma_A$ es metabeliano) ni es abeliano.

(2) Si $g$ tiene puntos periódicos entonces la acción de $\Gamma_A$ tiene una órbita finita por las proposiciones 5.4 y 2.15.

(3) Si la acción presenta un minimal excepcional entonces $g$ no puede tener órbitas densas; además, por la observación anterior, tampoco puede tener órbitas finitas. Por lo tanto, $g$ también tiene un minimal excepcional.
El recíproco también es cierto: si $g$ tiene minimal excepcional entonces la acción no puede tener órbita finita (porque $g$ también la tendría) ni ser minimal (como vimos en la observación

(1)).

(4) Dado cualquier $\tilde{g} \in Homeo_+(S^1)$ con minimal excepcional podemos construir acciones $\eta : \Gamma_A \to Homeo_+(S^1)$ tales que $\eta(a) = \tilde{g}$.
Sea $K$ el minimal de $\tilde{g}$. Fijamos $\{I_l\}$ familia de intervalos tal que $\cup_l \cup_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{g}^n(I_l) = K^c$ y $\tilde{g}^n(I_l) \cap I_{l'} = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ si $l \neq l'$ y para todo $n \neq 0$ si $l = l'$. Para cada $l$ elegimos una acción $\chi_l : \mathcal{A} \to Homeo_+(I_l)$.
Con esto logramos una acción fiel $\eta : \Gamma_A \to Homeo_+(S^1)$ definida de la siguiente manera:
* $\eta(a) = \tilde{g}$,
* en $K$ el grupo $\mathcal{A}$ actúa trivialmente,
* si $x \in \tilde{g}^k(I_l)$, $h \in \mathcal{A}$, entonces $\eta(h)(x) = \tilde{g}^k \chi_l(a^{-k}ha^k)\tilde{g}^{-k}(x)$.
Para ver que realmente esto define una acción hay que utilizar las mismas ideas que en la observación posterior al corolario 2.6 y el ejemplo posterior al teorema 3.4.
Esta acción tiene como minimal a $K$: es claro que $K$ es invariante y por ser minimal para $\tilde{g}$ lo es para $\eta$.

(5) Sea $\varphi : \Gamma_A \to Homeo_+(S^1)$ una representación fiel con minimal excepcional. En la observación (3) vimos que entonces $g$ tiene minimal excepcional. Ya vimos en la proposición 5.4 que todas las $f_i$ tienen puntos periódicos, supondremos que todas tienen puntos fijos. Veremos que en este caso todas las acciones son como las del punto (4).
Sean $x \in \cap Fix(f_i)$, $c = a^{-r}b_1^{t_1}...b_n^{t_n}a^r \in \mathcal{A}$, entonces $\varphi(c)(x) = g^{-r}f_1^{t_1}...f_n^{t_n}g^r(x) = x$ (porque, como mostramos en la proposición 5.4, $g(\cap Fix(f_i)) = \cap Fix(f_i))$; o sea que la acción de $\mathcal{A}$ en $\cap Fix(f_i)$ es trivial. Por ser $\cap Fix(f_i)$ invariante por $g$ se tiene que $K \subseteq \cap Fix(f_i)$ (cuando el minimal es excepcional este es el único minimal). Entonces cualquier $J$ componente conexa de $K^c$ es invariante por $\mathcal{A}$.
Conociendo $g$ y esta acción de $\mathcal{A}$ en $J$ queda determinada la acción de $\mathcal{A}$ en $\cup_{n\in\mathbb{Z}} g^n(J)$: si $c \in \mathcal{A}$ y $x \in g^n(J)$ entonces $\varphi(c)(x) = \varphi(a^n a^{-n} c a^n a^{-n})(x) = g^n \varphi(a^{-n} c a^n) g^{-n}(x)$. Justamente así definimos las acciones en (4).

(6) Dado $q \in \mathbb{Z}^+$, el subgrupo $H$ de $\Gamma_A$ generado por $\{a, b_1^q, ..., b_n^q\}$ es isomorfo a $\Gamma_A$. Repitiendo la prueba de la proposición 5.1 es claro que todos los elementos de $H$ pueden escribirse como $a^r b_1^{qt_1}...b_n^{qt_n} a^s$; luego es fácil probar que el mapa $\psi : H \to \Gamma_A$ dado por $\psi(a^r b_1^{qt_1}...b_n^{qt_n} a^s) = a^r b_1^{t_1}...b_n^{t_n} a^s$ es un isomorfismo.
Si $\varphi : \Gamma_A \to Homeo_+(S^1)$ es una representación fiel entonces existe $q \in \mathbb{Z}^+$ tal que $Fix(\varphi(b_i^q)) \neq \emptyset$ para todo $i$. Restringiendo la acción a $H =< b_1^q, ..., b_n^q, a >$ obtenemos una acción fiel de este subgrupo en $S^1$. Vía el isomorfismo $\psi$ esto genera una acción fiel $\eta = \varphi\psi^{-1} : \Gamma_A \to Homeo_+(S^1)$ tal que $Fix(\eta(b_i)) \neq \emptyset$. O sea que si $\eta(a) = \varphi(a)$ tiene minimal excepcional llegamos a una representación como la del punto (4).

## 5.2. Acciones $C^1$ sobre $S^1$

Ya vimos en el capítulo 4 que en el caso de $A = kI_n$, el grupo $\Gamma_A = \Gamma_{n,k}$ actúa fielmente de forma $C^1$ sobre $S^1$, y que estas acciones siempre admiten una órbita finita.
Para el caso en que $A$ es cualquier matriz surgen las siguientes preguntas: ¿existe alguna acción fiel de $\Gamma_A$ en $Difeo^1_+(S^1)$? En caso de ser así, ¿esta acción admite un conjunto invariante finito?

Las observaciones anteriores nos dan alguna idea acerca de cómo responder estas preguntas. En particular, muestran que en el caso $C^2$ la acción siempre tiene una órbita finita.
La proposición 5.3 nos dice que la respuesta a la primera pregunta es afirmativa bajo ciertas hipótesis, ya que el grupo afín se puede ver dentro de $Difeo^{\infty}(S^1)$.
El siguiente resultado responde una de las interrogantes en caso que la matriz tiene valores propios enteros con valor absoluto mayor a 1.

**Proposición 5.5** *Si la representación es $C^1$, $A - Id$ es invertible y $A$ tiene un valor propio entero distinto de -1 entonces existe una órbita finita.*

*Demostración:*
Por el ítem (2) en la observación anterior, basta probar que $g$ tiene una órbita finita.
Observemos que si $(r_1, ..., r_n) \in \mathbb{Z}^n$ es vector propio de $A$ correspondiente al valor propio $d \in \mathbb{Z}$ se tiene que $gf_1^{r_1}...f_n^{r_n}g^{-1} = (f_1^{r_1}...f_n^{r_n})^d$. Si llamamos $h = f_1^{r_1}...f_n^{r_n}$ tendremos que $< h, g >$ es isomorfo a $BS(1, d)$; si $d > 1$ el teorema 3.8 implica que $g$ tiene órbita periódica; si $d < -1$ tomamos el grupo $< h, g^2 >$ que es isomorfo a $BS(1, d^2)$.•

**Ejemplos:**
Mostraremos con algunos ejemplos la dificultad de que exista una acción de $\Gamma_A$ en $Difeo_+^1(S^1)$ con minimal excepcional.

(1) Sea $A = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ con dos valores propios reales distintos, ninguno de ellos igual a 1 o -1. Para facilitar las cuentas supondremos $0 < \mu < 1 < \lambda$.

Se deduce de las observaciones al final de la sección anterior que dar una acción $\eta : \Gamma_A \to Homeo_+(S^1)$ con minimal excepcional es equivalente a elegir $\eta(a)$ con minimal excepcional y una familia de acciones del subgrupo $\mathcal{A}$ en $\mathbb{R}$. Veremos la imposibilidad de obtener una acción fiel $\eta : \Gamma_A \to Difeo_+^1(S^1)$ si una de estas acciones $\phi : \mathcal{A} \to Homeo(\mathbb{R})$ es libre.

En la demostración de la proposición 5.2 mostramos la existencia de $P : \mathcal{A} \to \mathbb{Q}^2$, un morfismo inyectivo que verifica $P(b_i) = e_i$.
Como la acción $\phi$ es libre tenemos por el teorema de Hölder (2.10) un morfismo inyectivo $R : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ y una semiconjugación $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $S\phi(g) = T_{R(g)}S$ para todo $g \in \mathcal{A}$.
Definimos $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la transformación lineal dada por $\varphi(t_1, t_2) = t_1R(b_1) + t_2R(b_2)$.

*Afirmación: $R = \varphi P$.*
En el grupo $< b_1, b_2 >$ esto es claro, ya que $R$ y $\varphi P$ son morfismos de grupos que coinciden en el generador $\{b_1, b_2\}$. Probaremos que $R(a^{-1}b_ia) = \varphi P(a^{-1}b_ia)$ para $i = 1, 2$; por inducción se prueba de manera análoga que $R(a^{-h}b_ia^h) = \varphi P(a^{-h}b_ia^h)$ para todo $h > 0$, lo que demuestra la afirmación.
Por definición del grupo tenemos $b_1 = (a^{-1}b_1a)^{m_{11}}(a^{-1}b_2a)^{m_{21}}$ y $b_2 = (a^{-1}b_1a)^{m_{12}}(a^{-1}b_2a)^{m_{22}}$; o sea que aplicando $R$ obtenemos:
$R(b_1) = m_{11}R(a^{-1}b_1a) + m_{21}R(a^{-1}b_2a)$ y $R(b_2) = m_{12}R(a^{-1}b_1a) + m_{22}(a^{-1}b_2a)$.
Matricialmente esto puede escribirse como $A^T \begin{pmatrix} R(a^{-1}b_1a) \\ R(a^{-1}b_2a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(b_1) \\ R(b_2) \end{pmatrix}$, lo que es equi-

valente a $\begin{pmatrix} R(a^{-1}b_1a) \\ R(a^{-1}b_2a) \end{pmatrix} = (A^T)^{-1} \begin{pmatrix} R(b_1) \\ R(b_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} m_{22}R(b_1) - m_{21}R(b_2) \\ m_{11}R(b_2) - m_{12}R(b_1) \end{pmatrix}$.
Por otro lado, la definición de $P$ nos dice que
$\varphi P(a^{-1}b_1a) = \varphi A^{-1}(e_1) = \frac{1}{det(A)}\varphi(m_{22}, -m_{21}) = \frac{1}{det(A)}(m_{22}R(b_1) - m_{21}R(b_2))$ y $\varphi P(a^{-1}b_2a) = \varphi A^{-1}(e_2) = \frac{1}{det(A)}\varphi(-m_{12}, m_{11}) = \frac{1}{det(A)}(m_{11}R(b_2) - m_{12}R(b_1))$.
Esto concluye la prueba de la afirmación.

La conjugación por $a$, $c_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es un isomorfismo, podemos llevarlo vía $P$ a un isomorfismo de $P(\mathcal{A})$, el mapa $Pc_aP^{-1} : P(\mathcal{A}) \to P(\mathcal{A})$. Es evidente de la definición de $P$ que $Pc_aP^{-1}(v) = Av$ para todo $v \in P(\mathcal{A})$, por lo tanto podemos pensar que $Pc_aP^{-1}$ es la restricción a $P(\mathcal{A})$ del mapa lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Definimos ahora $M_m : \{0,1\}^m \to \mathbb{R}$ como $M_m(d_1, ..., d_m) = R(a^m b_1^{d_m} a^{-m} ... a b_1^{d_1} a^{-1})$. Escribimos $e_1 = v_\lambda + v_\mu$, con $v_\lambda$, $v_\mu$ vectores propios con valores propios $\lambda$ y $\mu$ respectivamente. Tendremos entonces:
$M_m(d_1, ..., d_m) = R(a^m b_1^{d_m} a^{-m} ... a b_1^{d_1} a^{-1}) = \varphi P(a^m b_1^{d_m} a^{-m} ... a b_1^{d_1} a^{-1}) = \varphi P(a^m b_1^{d_m} a^{-m}) + ... + \varphi P(a b_1^{d_1} a^{-1}) = \varphi A^m(d_m e_1) + ... + \varphi A(d_1 e_1) = d_m \varphi(\lambda^m v_\lambda + \mu^m v_\mu) + ... + d_1 \varphi(\lambda v_\lambda + \mu v_\mu) = d_m(\lambda^m \varphi(v_\lambda) + \mu^m \varphi(v_\mu)) + ... + d_1(\lambda\varphi(v_\lambda) + \mu\varphi(v_\mu))$.

Supondremos $\varphi(v_\lambda) \neq 0$ (si fuera 0, entonces $\varphi(v_\mu) \neq 0$ y en ese caso hacemos las mismas cuentas pero conjugando por $a^{-1}$, o sea que nos queda la matriz $A^{-1}$, para la cual $1/\mu > 1$ es valor propio).

Tomemos $(d_1, ..., d_m), (d'_1, ..., d'_m) \in \{0,1\}^m$ distintos, sea $s$ el máximo de los $j$ tales que $d_j \neq d'_j$, supongamos que $d_s = 1, d'_s = 0$. Entonces:
$|M_m(d_1, ..., d_m) - M_m(d'_1, ..., d'_m)| = |\varphi(v_\lambda)\lambda^s + \varphi(v_\lambda)[\lambda^{s-1}(d_{s-1} - d'_{s-1}) + ... + \lambda(d_1 - d'_1)] + \varphi(v_\mu)[\mu^s + \mu^{s-1}(d_{s-1} - d'_{s-1}) + ... + \mu(d_1 - d'_1)]| \geq |\varphi(v_\lambda)\lambda^s| - |\varphi(v_\lambda)[\lambda^{s-1}(d_{s-1} - d'_{s-1}) + ... + \lambda(d_1 - d'_1)]| - |\varphi(v_\mu)[\mu^s + \mu^{s-1}(d_{s-1} - d'_{s-1}) + ... + \mu(d_1 - d'_1)]| \geq |\varphi(v_\lambda)|(\lambda^s - \frac{\lambda}{\lambda - 1}(\lambda^{s-1} - 1)) - |\varphi(v_\mu)|(\frac{\mu - \mu^{s+1}}{1-\mu})$.

Por lo tanto, si $\lambda$ es suficientemente grande existe $K > 0$ tal que para todo $(d_1, ..., d_m) \neq (d'_1, ..., d'_m)$ se tiene $|M_m(d_1, ..., d_m) - M_m(d'_1, ..., d'_1)| \geq K$.

Ahora, $\lambda > 1$ es el valor propio de $A$, por ende es una constante. ¿Cómo lograr que $\lambda$ sea tan grande como necesitamos? Para ello precisamos cambiar la definición de $M_m$: fijamos $r > 0$ de forma que $\lambda^r$ sea del tamaño que precisamos y definimos $M_m(d_1, ..., d_m) = R(a^{rm} b_1^{d_m} a^{-rm} ... a^r b_1^{d_1} a^{-r})$. De esta manera todo lo hecho antes funciona, con la diferencia que el mapa lineal pasa a ser $A^r$ en lugar de $A$, cuyos valores propios son $\lambda^r$ y $\mu^r$, por lo tanto logramos que el valor propio mayor sea del orden necesario.

Tomemos ahora un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $S(I)$ tenga longitud menor que $K$. Tenemos para todo $(d_1, ..., d_m) \in \{0,1\}^m$: $S\phi(a^{rm} b_1^{d_m} a^{-rm} ... a^r b_1^{d_1} a^{-r}) = T_{M_m(d_1, ..., d_m)} S$.
Si $(d_1, ..., d_m), (d'_1, ..., d'_m) \in \{0,1\}^m$ son distintos entonces $S\phi(a^{rm} b_1^{d_m} a^{-rm} ... a^r b_1^{d_1} a^{-r})(I) \cap$

$S\phi(a^{rm}b_1^{d'_m}a^{-rm}...a^rb_1^{d'_1}a^{-r})(I) = T_{M_m(d_1,...,d_m)}S(I) \cap T_{M_m(d'_1,...,d'_m)}S(I) = \emptyset$ ya que $|M_m(d_1,...,d_m) - M_m(d'_1,...,d'_1)| \geq K$ y $S(I)$ tiene longitud menor a $K$.
Por lo tanto, concluimos que $\phi(a^{rm}b_1^{d_m}a^{-rm}...a^rb_1^{d_1}a^{-r})(I) \cap \phi(a^{rm}b_1^{d'_m}a^{-rm}...a^rb_1^{d'_1}a^{-r})(I) = \emptyset$ para $m$-uplas distintas.

Sea $h \in Difeo^1_+(S^1)$ con minimal excepcional $K$, $L$ una componente conexa de $K^c$. Veamos que no podemos definir una representación $\eta : \Gamma_A \to Difeo^1_+(S^1)$ con $\eta(a) = h$ y $\mathcal{A}$ actuando libremente en $L$. Notaremos $f = \eta(b_1)$.
Conjugando la acción de $\mathcal{A}$ en $L$ por un difeomorfismo $c : L \to \mathbb{R}$ obtenemos una acción libre de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{R}$. Por lo probado antes, existe un intervalo $J \subseteq L$ tal que para dos m-uplas distintas $(d_1,...,d_m),(d'_1,...,d'_m) \in \{0,1\}^m$ se tiene que $h^{rm}f^{d_m}h^{-rm}...h^rf^{d_1}h^{-r}(J)$ y $h^{rm}f^{d'_m}h^{-rm}...h^rf^{d'_1}h^{-r}(J)$ son intervalos disjuntos incluidos en $L$.
Podemos utilizar el mismo argumento que en el teorema 3.5 para probar que
$(h^{rm}f^{d_m}h^{-rm}...h^rf^{d_1}h^{-r})'(x) \geq (3/4)^m$ para todo $x \in L$ y llegar a una contradicción con el hecho de que $long(\bigcup_{(d_i)} h^{rm}f^{d_m}h^{-rm}...h^rf^{d_1}h^{-r}(J)) = \sum_{(d_i)} long(h^{rm}f^{d_m}h^{-rm}...h^rf^{d_1}h^{-r}(J)) \geq 2^m(3/4)^m long(J) > long(L)$ si $m$ es grande.

(2) Esta misma prueba sirve cuando ambos valores propios son mayores que 1, sólo observando que si $1 < \mu < \lambda$ entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi(v_\lambda)|(\lambda^{rs} - \frac{\lambda^r}{\lambda^r-1}(\lambda^{rs-r} - 1)) - |\varphi(v_\mu)|(\frac{\mu^r-\mu^{rs+r}}{1-\mu^r}) > K > 0$ para todo $s \in \mathbb{N}$.

(3) Si alguno de los valores propios es negativo, la prueba vale utilizando la conjugación por $a^2$, lo que equivale a que aparezca la matriz $A^2$, que tiene valores propios positivos.

(4) También funcionan estos argumentos cuando la matriz $A$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$ sin valores propios enteros, sin importar el tamaño de la matriz. Para ello debe cambiarse en la demostración $\lambda$ por el mayor valor propio $\sigma$ tal que $\varphi(v_\sigma) \neq 0$.

# Bibliografía


[1] M. Asaoka; Rigidity of certain solvable actions on the sphere, Geom. and Topology 16 n. 3 (2012), no. 3, 1835-1857.

[2] R. Bieri, R. Strebel; Almost finitely presented soluble groups, Comm. Math. Helv. 53 (1978), 258-278.

[3] L.Burslem, A.Wilkinson; Global rigidity of solvable group action on $S^1$. Geom. Topol. 8 (2004) 877-924.

[4] J.Cantwell, L.Conlon; An interesting class of $C^1$ foliations, Topology and its applications 126 (2002), 281-297.

[5] B.Deroin, V. Kleptsyn, A. Navas; Sur la dynamique unidimensionnelle en régularité intermédiaire, Acta Mathematica 199 (2007), 199-262.

[6] W. de Melo, S. van Strien; One-dimensional dynamics, Springer-Verlag, 1993.

[7] B.Farb, J.Franks; Groups of homeomorphisms of one manifolds I: actions of nonlinear groups, preprint (2001).

[8] E.Ghys; Groups acting on the circle, L'Enseignement Mathématique 47 (2001), 329-407.

[9] N.Guelman, I.Liousse; $C^1$ actions of Baumslag Solitar groups on $S^1$, Algebraic and Geometric Topology 11 (2011), 1701-1707.

[10] G.Higman, B.H.Neumann, H.Neumann; Embedding theorems for groups, J. London Math. Soc. 24 (1949), 247-254.

[11] G.Margulis; Free subgroups of the homeomorphism group of the circle, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331 (2000), 669-674.

[12] A.McCarthy; Rigidity of trivial actions of abelian-by-cyclic groups, Proc. Amer. Math. Soc., 138 (2010), 1395-1403.

[13] A.Navas; A finitely generated, locally indicable group with no faithful action by $C^1$ diffeomorphisms of the interval, Geom Topol 14 (2010), 573-584.

[14] A.Navas; On the dynamics of left orderable groups, Annales de l'institut Fourier, 60 no. 5 (2010), 1685-1740.

[15] A.Navas; Grupos de difeomorfismos del círculo, Ensaios matemáticos, vol.13 (2007).

[16] A.Navas; Groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle, du cercle et de la droite, Bulletin of the Brazilian Math Soc, New Series 35 (2004), 13-50.

[17] C.Rivas; On spaces of Conradian group orderings, Journal of group theory (2009), 1-17.

[18] J.Stillwell; Classical topology and combinatorial group theory, Ed. Springer, segunda edición (1993).

[19] W.Thurston; A generalization of the Reeb stability theorem, Topology 13 (1974), 347-352.